Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

MỘT DẠNG TỔNG QUÁT CỦA NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN TRƠN BORWEIN-PREISS CHO ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Đinh Ngọc Quý[1], Nguyễn Duy Cường[1] và Lê Vĩnh Hòa[1]
[1] Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận: 05/11/2014
Ngày chấp nhận: 26/02/2015

Title:
A generalization of Borwein-Preiss smooth variational principle for set-valued mappings

Từ khóa:
Nguyên lý biến phân Ekeland, nguyên lý biến phân trơn Borwein-Priess, nhiễu tập, cực tiểu Pareto, cực tiểu Kuroiwa

Keywords:
Ekeland's variational principle, Borwein-Preiss smooth variational principle, set perturbations, Pareto minimizers, Kuroiwa's minimizers

ABSTRACT

We give a generalization of Borwein-Preiss smooth variational principle for set-valued mappings, replacing the distance and the norm by a gauge-type lower semi-continuous function. For set-valued mappings, we consider a kind of minimizers which is different from the Pareto one.

TÓM TẮT

Chúng tôi đưa ra một dạng tổng quát của nguyên lý biến phân trơn Borwein-Priess cho ánh xạ đa trị, thay thế hàm khoảng cách và chuẩn bởi hàm cỡ "gauge-type" nửa liên tục dưới. Nghiên cứu ánh xạ đa trị, chúng tôi quan tâm đến dạng nghiệm cực tiểu mới, khác so với dạng nghiệm Pareto thường nghiên cứu.

1 MỞ ĐẦU

Quan tâm đến quá trình mở rộng của các nguyên lý biến phân, chúng ta nhận thấy rằng điều kiện cực tiểu hóa của nguyên lý biến phân Ekeland có thể được phát biểu lại như sau: *Với* (X,d) *là một không gian metric đủ, cho trước một hàm nửa liên tục dưới* $f: X \to R \cup \{+\infty\}$ *thỏa* $\inf_{x\in X} f(x) > -\infty$, *khi đó tồn tại một hàm* $\tilde{f}: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *là hàm tựa dưới của hàm* f *tại* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ *sao cho,*

$\tilde{f}(\bar{x}) = f(\bar{x})$ *và* $\tilde{f}(x) \le f(x), \forall x \in X$. Theo nguyên lý biến phân Ekeland, xét trong không gian Banach, thì hàm tựa dưới $\tilde{f}$ có thể được chọn bằng cách nhiễu ánh xạ f bởi một lượng nhiễu có dạng chuẩn. Rõ ràng một điểm bất lợi của kết quả này hàm tựa dưới f là một hàm không trơn, và do đó một câu hỏi lớn được mở ra là phải tìm hàm tựa $\tilde{f}$ có tính chất trơn hóa, người ta gọi là nguyên lý biến phân trơn. Kết quả đầu tiên của nguyên lý biến phân trơn được đưa ra bởi Stegall trong (*Stegall, 1978*). Ông đã chỉ ra rằng, xét trong không gian Banach phản xạ, một hàm nửa liên tục dưới nếu thỏa mãn điều kiện mở rộng khi $|x| \to +\infty$, và với tính chất Radon-Nikodým, hàm tựa dưới $\tilde{f}$ có thể được chọn như một hàm tuyến tính với chuẩn tùy ý đủ nhỏ. Một dạng nguyên lý biến trơn mạnh hơn, đã được đưa ra trong trường hợp tổng quát (*Borwein, Preiss, 1987*). Các tác giả đã chỉ ra rằng, nếu tồn tại một cơ sở tiền chuẩn trơn trong không gian Banach, khi đó hàm tựa dưới có thể được chọn là một hàm lõm và trơn tương ứng với cơ sở tiền chuẩn đó. Nguyên lý biến phân trơn Borwein-Preiss đã được mở rộng theo một vài hướng khác. Chẳng hạn như trong (*Deville et al., 1993*), chỉ ra rằng, trong trường hợp đặc biệt, các hàm tựa có thể được chọn trong trường hợp tập cơ sở là trơn (nhưng không cần tính lõm) dưới điều kiện tổng quát hơn dựa trên sự tồn tại hàm "bump" trơn Lipschitz. Trong một dạng tổng quát của Nguyên lý biến phân trơn Borwein-Preiss (*Li, Shi, 2000*) các tác giả đã thay thế hàm khoảng cách mêtric và chuẩn bởi một hàm cỡ "gauge-type" chỉ cần tính nửa liên tục dưới. Họ cũng nghiên cứu một vài ứng dụng của dạng tổng quát này vào nghiên cứu tính khả vi của các hàm lồi. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một dạng tổng quát của nguyên lý biến phân trơn Borwein-Preiss cho ánh xạ đa trị. Nghiên cứu ánh xạ đa trị, chúng tôi quan tâm đến dạng nghiệm cực tiểu mới, khác so với dạng nghiệm Pareto thường được nghiên cứu. Các kết quả được đưa ra trong bài báo là tổng quát so với một số kết quả đã công bố trước đó.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong suốt mục này, nếu không có gì đặc biệt, chúng ta luôn giả thiết X là không mêtric, Y là không gian véctơ tôpô được trang bị thứ tự bởi nón $K \subseteq Y$ khác trống, lồi đóng, có đỉnh. Thứ tự trên Y được cho bởi, $\forall x, y \in Y$ ta có $x \leq_K y$ khi và chỉ khi $y - x \in K$. Khi đó, tập $A \subseteq Y$ được gọi là tập K- đóng nếu $A + K$ là tập đóng. Chúng ta nhắc lại một số khái niệm bị chặn được giảm nhẹ dưới đây. Một tập $A \subseteq Y$ được gọi là tựa bị chặn dưới nếu tồn tại một tập bị chặn $M \subseteq Y$ sao cho $A \subseteq M + K$. Tập A được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một phần tử $y \in Y$ sao cho $A \subseteq y + K$. Với ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$, chúng ta nói F là bị chặn (tựa bị chặn) dưới nếu $F(X)$ là bị chặn (tựa bị chặn) dưới. Để ý rằng, tính bị chặn dưới thì kéo theo tính tựa bị chặn dưới nhưng ngược lại thì lại không đúng. Chúng ta xét một thí dụ đơn giản sau đây để làm rõ điều này: Lấy $Y = 2^{\mathbb{R}}$, $K = \{(y_1, 0) : y_1 \geq 0\}$ và $A = \{(0, y_2) : 0 \leq y_2 \leq 1\}$, khi đó A là một tập tựa bị chặn dưới nhưng A không bị chặn dưới.

Tiếp theo, chúng ta cùng thảo luận khái niệm nghiệm cực tiểu Kuroiwa của ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 2.1. Lấy $F : X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó (*Kuroiwa, 2001*) $\bar{x} \in X$ được gọi là điểm cực tiểu Kuroiwa của ánh xạ đa trị F nếu $F(\bar{x}) \subseteq F(x) + K$ với một $x \in X$, kéo theo $F(x) \subseteq F(\bar{x}) + K$. $\bar{x} \in X$ được gọi là điểm cực tiểu Pareto của ánh xạ đa trị F nếu tồn tại $\bar{y} \in F(\bar{x})$ sao cho $F(X) \cap (\bar{y} - K) = \{\bar{y}\}$. Một khái niệm chặt của nghiệm cực tiểu Kuroiwa được đưa ra một cách tự nhiên dưới đây.

Định nghĩa 2.2 (*Ha, 2005*). Lấy $F : X \to 2^Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó $\bar{x} \in X$ được gọi là điểm cực tiểu Kuroiwa chặt của ánh xạ F nếu

$$F(\bar{x}) \not\subset F(x) + K, \forall x \neq \bar{x}.$$

Nhận xét trong trường hợp F là ánh xạ đơn trị thì khái niệm nghiệm cực tiểu Pareto và nghiệm cực tiểu Kuroiwa là hoàn toàn trùng nhau. Tuy nhiên trong trường hợp ánh xạ đa trị tổng quát, mối quan hệ giữa hai khái niệm nghiệm cực tiểu ở trên khá thú vị. Điều đó được minh họa bởi Thí dụ 2.1 và Thí dụ 2.2 dưới đây.

Thí dụ 2.1 (*Khánh và Quý, 2011*). Cho $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$ và ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$ được cho bởi

$$F(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda(x, 1), 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Khi đó, không tồn tại nghiệm cực tiểu Kuroiwa của ánh xạ đa trị F, nhưng với mỗi $x \in X$ đều là nghiệm cực tiểu Pareto của F.

Thí dụ 2.2 (*Khánh và Quý, 2011*). Cho X, Y, K như trong Thí dụ 2.1. Ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$ được cho bởi

$$F(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}.$$

Khi đó, không tồn tại nghiệm cực tiểu Pareto của ánh xạ đa trị F, nhưng với mỗi $x \in X$ đều là nghiệm cực tiểu Kuroiwa, cũng như nghiệm cực tiểu Kuroiwa chặt của ánh xạ đa trị F.

Dưới đây chúng tôi nhắc lại các định nghĩa nửa liên tục của ánh xạ đa trị, từ đó chỉ ra mối quan hệ giữa chúng. Trước hết, quan tâm đến ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$, hàm f được gọi là nửa liên tục dưới theo nón K (K-lower semi-continuous, viết tắt là K-lsc) tại x khi và chỉ khi, với mọi $e \in Y$ và

$\{x_n\} \to x$ sao cho $f(x_n) \leq_K e$ với mọi n, chúng ta có $f(x) \leq_K e$.

Bây giờ chúng ta đưa ra các dạng tổng quát của những tính chất trên trong trường hợp ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$.

Định nghĩa 2.3. (i) F được gọi là nửa liên tục trên (upper semi-continuous, viết tắt là usc) tại $\bar{x} \in X$ khi và chỉ khi với mọi lân cận mở U của $F(\bar{x})$, tồn tại một lân cận V của $\bar{x}$ sao cho $F(V) \subset U$.

(ii) F được gọi là liên tục trên theo nón K (K-upper continuous, viết tắt là uKc) tại $\bar{x} \in X$ khi và chỉ khi với mọi lân cận mở U của $F(\bar{x})$, tồn tại một lân cận V của $\bar{x}$ sao cho $F(V) \subset U + K$.

(iii) F được gọi là nửa liên tục dưới theo nón K (K-lower semi-continuous, viết tắt là K-lsc) tại $\bar{x} \in X$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \to \bar{x}$ và mọi $e \in Y$,

$$[F(x_n) \cap (e-K) \neq \emptyset, \forall n] \Rightarrow [F(\bar{x}) \cap (e-K) \neq \emptyset]$$

Chúng ta luôn nói rằng hàm F có tính chất nào đó trên tập $A \subseteq X$ khi và chỉ khi F có tính chất đó tại mọi điểm của A và không nhắc đến A trong trường hợp đặc biệt $A = X$.

Mệnh đề 2.1 (*Ha, 2005*). Cho ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$.

(i) F là K-lsc nếu và chỉ nếu tập hợp $\{x \in X : e \in F(x) + K\}$ là tập đóng với mọi $e \in Y$

(ii) F là K-lsc nếu và chỉ nếu tập hợp $\{x \in X : A \subseteq F(x) + K\}$ là tập đóng với mọi tập $A \subseteq Y$.

Chứng minh. (i) ($\Rightarrow$) Cố định $e \in Y$. Lấy $x_n \to \bar{x}$ với $e \in F(x_n) + K$, $\forall n$. Khi đó, do F là K-lsc nên $F(\bar{x}) \cap (e-K) \neq \emptyset$, suy ra $e \in F(\bar{x}) + K$.

($\Leftarrow$) Cố định $e \in Y$. Lấy $x_n \to \bar{x}$ với $e \in F(x_n) + K, \forall n$. Khi đó, do $\{x \in X : e \in F(x) + K\}$ là đóng nên $\bar{x}$ thuộc vào tập này, suy ra $F(\bar{x}) \cap (e-K) \neq \emptyset$.

(ii) Để ý rằng, do (i) và từ đẳng thức $\{x \in X : A \subseteq F(x) + K\} = \cap_{a \in A} \{x \in X : a \in F(x) + K\}$,ta có, với giả thiết F là K- lsc, suy ra $\{x \in X : A \subseteq F(x) + K\}$ là đóng, $\forall A \subseteq Y$.

Mệnh đề ngược lại là hiển nhiên khi xét với trường hợp đặc biệt $A = \{e\}$.

Mệnh đề 2.2 (*Khánh và Quý, 2013*). Cho ánh xạ đa trị $F : X \to 2^Y$.

(i) Nếu F là usc tại $\bar{x}$ thì F là uKc tại $\bar{x}$.

(ii) Nếu F là uKc tại $\bar{x}$ thì F là K-lsc tại $\bar{x}$.

Chứng minh. (i) Điều này là hiển nhiên.

(ii) Lấy $x_n \to \bar{x}$ với $e \in F(x_n) + K$. Giả sử rằng $y_n \in F(x_n) \cap (e-K)$ nhưng $F(\bar{x}) \subseteq Y \setminus (e-K)$. Bởi tính u$K$c của hàm F, tồn tại lân cận V của $\bar{x}$ sao cho $F(V) \subseteq Y \setminus (e-K) + K$. Khi đó, với n đủ lớn ta có $y_n \subseteq Y \setminus (e-K) + K$, kéo theo $y_n \notin e-K$, điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

Thí dụ 2.3 (*Khánh và Quý, 2013*). (chiều ngược lại của Mệnh đề 2.2(i) không đúng). Cho $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$ và

$$F(x) = \begin{cases} \{(a,b):\ a \geq 0, b \geq 0\} & \text{khi } x \neq 0 \\ \{(0,0)\} & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Khi đó F là uKc nhưng không usc tại $\bar{x} = 0$.

Thí dụ 2.4 (*Khánh và Quý, 2013*). (chiều ngược lại của Mệnh đề 2.2(ii) không đúng). Cho $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$ và

$$F(x) = \begin{cases} \{(x,1)\} & \text{khi } x \leq 0 \\ \left\{\left(\frac{1}{x}, 0\right)\right\} & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$$

Khi đó F là K-lsc nhưng không uKc tại $\bar{x} = 0$.

3 MỞ RỘNG CỦA NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN BORWEIN-PREISS

Năm 1987, để nghiên cứu ứng dụng vào bài toán khả vi của các hàm lồi, Borwein và Preiss đã đưa ra nguyên lý biến phân trơn được phát biểu trong không gian Banach (*Borwein, Preiss, 1987*).

Dưới đây là một dạng phát biểu của nguyên lý biến phân trơn Borwein-Preiss nhưng được viết lại trong trường hợp tổng quát hơn trên nền không gian mêtric đủ (X,d).

Định lý 3.1 (Nguyên lý biến phân Borwein-Preiss). Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, hàm thực mở rộng $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới, $\lambda > 0$ và $q \geq 1$. Khi đó, với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x_0) \leq \inf_{x\in X} f + \varepsilon$ thì tồn tại một dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ tới $x_\varepsilon \in X$ và một hàm $\phi_q : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\phi_q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n d^q(x_n, x),$

với $\mu_n > 0, \forall n$ và $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n = 1$ sao cho

$$d(x_0, x_\varepsilon) \leq \lambda,$$

$$f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^q}\phi_q(x_\varepsilon) \leq f(x_0),$$

$$f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^q}\phi_q(x) > f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^q}\phi_q(x_\varepsilon), \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}.$$

Dưới đây là một dạng tổng quát của nguyên lý trên, ở đó hàm khoảng cách và hàm chuẩn được thay bởi một hàm cỡ "gauge-type" là hàm chỉ cần tính nửa liên tục dưới theo biến thứ hai. Các tác giả cũng nghiên cứu một vài ứng dụng của dạng này cho bài toán khả vi của các hàm lồi.

Định nghĩa 3.1 (*Li, Shi, 2000*). Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, ta nói rằng hàm $p: X \times X \to [0,+\infty)$ là một hàm cỡ "gauge-type" nếu các điều kiện dưới đây được thỏa mãn

(i) $p(x,x) = 0$, $\forall x \in X$,

(ii) $\forall (x_n, y_n) \in X \times X$, nếu $\{p(x_n, y_n)\} \to 0$ thì $\{d(x_n, y_n)\} \to 0,$

(iii) $p(x,\cdot)$ là hàm nửa liên tục dưới với mọi $x \in X$.

Định lý 3.2 (*Li, Shi, 2000*). Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, hàm thực mở rộng $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Giả sử p là hàm cỡ "gauge-type" và $\{\delta_n\}$ là một dãy số thực không âm với $\delta_0 > 0$. Khi đó, với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ sao cho $f(x_0) \leq \inf_{x\in X} f + \varepsilon$ thì tồn tại một dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ tới $x_\varepsilon \in X$ và một hàm $\psi : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n p(x_n, x),$

sao cho

(i) $p(x_n, x_\varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \forall n,$

(ii) $f(x_\varepsilon) + \psi(x_\varepsilon) \leq f(x_0)$,

(iii) $f(x) + \psi(x) > f(x_\varepsilon) + \psi(x_\varepsilon), \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}$

Hơn nữa, nếu $\delta_t > 0$ và $\delta_l = 0$ với mọi $l > t \geq 0$ thì (iii) có thể viết lại dưới dạng

(iii') tồn tại $N_0 \geq t$ và hàm $\widetilde{\psi}_{t-1} : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\widetilde{\psi}_{t-1}(x) = \sum_{n=1}^{t-1} \delta_n p(x_n, x) + \delta_t p(x_{N_0}, x)$, sao cho $f(x) + \widetilde{\psi}_{t-1}(x) > f(x_\varepsilon) + \widetilde{\psi}_{t-1}(x_\varepsilon), \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}$.

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra các dạng tổng quát của nguyên lý biến phân trơn Borwein - Preiss cho trường hợp ánh xạ đa trị. Từ đây trở về sau, nếu không có gì đặc biệt ta luôn giả thiết (X,d) là một không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K \subseteq Y$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh, và $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Gọi Y^* là không gian tôpô đối ngẫu của Y và K^+ là nón dương liên hợp của K, tức là

$$K^+ = \{y^* : \langle y^*, y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}.$$

Sau đây là kết quả đầu tiên của một dạng tổng quát của nguyên lý biến phân trơn Borwein-Preiss.

Định lý 3.3. Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K \subseteq Y$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh, và $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Lấy $F: X \to 2^Y$ là một hàm K-lsc tựa bị chặn dưới. Giả sử p là hàm cỡ "gauge-type" và $\{\delta_n\}$ là một dãy số thực không âm với $\delta_0 > 0$. Khi đó, với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ thỏa $F(x_0) \not\subset F(x) + \varepsilon k_0$ thì tồn tại một dãy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ tới $x_\varepsilon \in X$ và một hàm $\psi : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n p(x_n, x),$

sao cho

(i) $p(x_n, x_\varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \forall n,$

(ii) $F(x_0) \subseteq F(x_\varepsilon) + \psi(x_\varepsilon) k_0 + K,$

(iii) $F(x_\varepsilon)+\psi(x_\varepsilon)k_0 \not\subset F(x)+\psi(x)k_0+K, \forall x\in X\setminus\{x_\varepsilon\}.$

Hơn nữa, nếu $\delta_t>0$ và $\delta_l=0$ với mọi $l>t\geq 0$ thì (iii) có thể viết lại dưới dạng

(iii') $\forall x\in X\setminus\{x_\varepsilon\}$, $\exists N_0\geq t$ và hàm $\psi_{t-1}:X\to\mathbb{R}$ với dạng

$\psi_{t-1}(x)=\sum_{n=1}^{t-1}\delta_n p(x_n,x)$, sao cho

$$F(x_\varepsilon)+\psi_{t-1}(x_\varepsilon)k_0+\delta_t p(x_{N_0},x_\varepsilon)\not\subset F(x)+\psi_{t-1}(x)k_0 +\delta_t p(x_{N_0},x)k_0+K.$$

Để chứng minh Định lý 3.3, ta chứng minh hai bổ đề sau.

Bổ đề 3.4. Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K\subseteq Y$ là một nón lồi đóng, có đỉnh, và $k_0\in K\setminus\{0\}$. Cho $\phi:X\to\mathbb{R}$ là hàm nửa liên tục dưới. Nếu $F:X\to 2^Y$ là K-lsc và có giá trị K-đóng thì tập $W=\{x\in X: F(a)+\phi(a)k_0\not\subset F(x)+\phi(x)k_0+K\}$ là đóng với mọi $a\in X$.

Chứng minh. Giả sử rằng $\{x_n\}\in W$ và $x_n\to\bar{x}$, ta chứng minh $\bar{x}\in W$. Cố định n, với mỗi $i\in\mathbb{N}$, vì hàm $\phi(\cdot)$ là nửa liên tục dưới, nên tồn tại $Q(i)\in\mathbb{N}$, sao cho $\forall n>Q(i)$ thì $\phi(x_n)\geq\phi(x)-\frac{1}{i}$.

Do $x_n\in W$ nên $\forall n>Q(i)$ thì $F(a)+\phi(a)k_0 \subseteq F(x_n)+\phi(x_n)k_0+K\subseteq F(x_n)+\left(\phi(\bar{x})-\frac{1}{i}\right)k_0+K$. Hơn nữa, do $x_n\to\bar{x}$ và F là K-lsc nên $\forall i\in\mathbb{N}$ ta có

$$F(a)+\phi(a)k_0\subseteq F(\bar{x})+\left(\phi(\bar{x})-\frac{1}{i}\right)k_0+K,$$

hay

$$F(a)+\phi(a)k_0+\frac{1}{i}k_0\subseteq F(\bar{x})+\phi(\bar{x})k_0+K.$$

Do F có giá trị K - đóng nên khi cho $i\to+\infty$ ta được

$$F(a)+\phi(a)k_0\subseteq F(\bar{x})+\phi(\bar{x})k_0+K.$$

do đó $\bar{x}\in W$ hay W đóng.

Bổ đề 3.5. Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K\subseteq Y$ là một nón lồi đóng, có đỉnh, và $k_0\in K\setminus\{0\}$. Cho $\phi:X\to\mathbb{R}_+$ là một hàm số. Nếu $F:X\to 2^Y$ là K-tựa bị chặn dưới trên $S\subseteq X$, khi đó $\forall\xi>0$ tồn tại $u\in S$ thỏa

$$F(u)+\phi(u)k_0\not\subset F(x)+\phi(x)k_0+\xi k_0+K, \forall x\in S. .$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng, giả sử $\forall\xi>0,\forall u\in S,\exists x\in S$ thỏa

$$F(u)+\phi(u)k_0\subseteq F(x)+\phi(x)k_0+\xi k_0+K.$$

Lấy tùy ý $x_1\in S$, khi đó ta luôn có thể chọn dãy $\{x_n\}\subseteq S$ thỏa

$$F(x_{n-1})+\phi(x_{n-1})k_0\subseteq F(x_n)+\phi(x_n)k_0+\xi k_0+K .$$

Khi đó với bất kỳ $n\geq 1$ thì ta luôn có

$$F(x_1)+\phi(x_1)k_0\subseteq F(x_n)+\phi(x_n)k_0+(n-1)\xi k_0+K .$$

Do F là K-tựa bị chặn dưới nên với mọi n ta có $F(x_1)+\phi(x_1)k_0-(n-1)\xi k_0\subseteq F(x_n)+\phi(x_n)k_0+K \subseteq M+K$, trong đó M là một tập bị chặn, $F(S)\subseteq M+K$. Lấy $z^*\in K^+$ thỏa $z^*(k_0)=1$ (sự tồn tại của z^* là do áp dụng định lý tách cho k_0 và $-K$). Cố định $y\in F(x_1)$, vì $F(x_1)+\phi(x_1)k_0-(n-1)\xi k_0 \subseteq M+K$, nên $\exists m\in M, \exists k\in K$ sao cho $y+\phi(x_1)k_0-(n-1)\xi k_0=m+k$.

Vậy ta có

$$z^*(y)+\phi(x_1)-(n-1)\xi\geq z^*(m)\geq\inf z^*(M).$$

Cho $n\to+\infty$, ta suy ra được điều mâu thuẫn với tính bị chặn của M.

Chứng minh Định lý 3.3.

Ta xét hai trường hợp của $\{\delta_n\}$, trường hợp thứ nhất là có vô hạn phần tử $\delta_n>0$, trường hợp thứ hai là có hữu hạn phần tử $\delta_n>0$.

Trường hợp 1: Không mất tính tổng quát ta giả sử $\delta_n>0$ với mọi n. Khi đó ta xác định $\{x_n\}\subseteq X$ và $\{S_i\}\subset 2^X$ với x_0 và

$$S_0:=\{x\in X: F(x_0)\subseteq F(x)+\delta_0 p(x_0,x)k_0+K\}$$

Vì $x_0\in S_0$ nên S_0 khác rỗng. Hơn nữa, theo bổ đề 3.4 với hàm $\phi(\cdot)=\delta_0 p(x_0,\cdot)$ và $a=x_0$ thì tập

S_0 là đóng. Ngoài ra, ta cũng có với mọi $x \in S_0$ thì $p(x_0, x) \le \frac{\varepsilon}{\delta_0}$. Thật vậy, nếu $p(x_0, x) > \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ thì,

$$F(x_0) \subseteq F(x) + \delta_0 p(x_0, x)k_0 + K \subseteq F(x) + \varepsilon k_0 + K$$

điều này mâu thuẫn với tính chất của x_0.

Áp dụng Bổ đề 2.5 với hàm $\phi(\cdot) = \delta_0 p(x_0, \cdot)$, $\xi := \frac{\varepsilon\delta_1}{2\delta_0}$ và $S := S_0$ thì ta luôn tồn tại $x_1 \in S$ thỏa với mọi $x \in S$ thì

$$F(x_1) + \delta_0 p(x_0, x_1)k_0 \not\subset F(x) + \delta_0 p(x_0, x)k_0 + \frac{\varepsilon\delta_1}{2\delta_0}k_0 + K,$$

và định nghĩa tương tự ta có

$$S_1 := \left\{ x \in S_0 : F(x_1) + \delta_0 p(x_0, x_1)k_0 \subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{1} \delta_j p(x_j, x)k_0 + K \right\}$$

Trong trường hợp tổng quát, ta xác định x_i, S_i với $i = \overline{0, n-1}$ thỏa

$$F(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_i)k_0 \not\subset F(x) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x)k_0 + \frac{\varepsilon\delta_1}{2\delta_0}k_0 + K,$$

và $S_i := \{ x \in S_{i-1} : F(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_i)k_0 \subseteq F(x)$

$+ \sum_{j=0}^{i} \delta_j p(x_j, x)k_0 + K$

Áp dụng Bổ đề 2.5 với $\phi(\cdot) := \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, \cdot)$, $\xi := \frac{\varepsilon\delta_n}{2^n \delta_0}$ và $S := S_{n-1}$. Ta luôn có thể chọn $x_n \in S_{n-1}$ thỏa với mọi $x \in S_{n-1}$ thì

$$F(x_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, x_n)k_0$$

$$\not\subset F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, x)k_0 + \frac{\varepsilon\delta_n}{2^n \delta_0}k_0 + K,$$ và

$$S_n := \{ x \in S_{n-1} : F(x_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, x_n)k_0$$

$\subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{n} \delta_j p(x_j, x)k_0 + K \}$ Do $x_n \in S_n$ nên S_n khác rỗng. Hơn nữa theo Bổ đề 2.4 với hàm $\phi(\cdot) := \sum_{j=0}^{n} \delta_j p(x_j, \cdot)$ và $a := x_n$ thì ta được S_n đóng.

Ta chứng minh rằng với mọi $x \in S$ thì $p(x_n, x) \le \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}$. Thật vậy, nếu $p(x_n, x) > \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}$ thì

$$F(x_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, x_n)k_0 \subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{n} \delta_j p(x_j, x)k_0 + K$$

$$\subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, x)k_0 + \delta_n p(x_n, x)k_0 + K$$

$$\subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \delta_j p(x_j, x)k_0 + \frac{\varepsilon\delta_n}{2^n \delta_0}k_0 + K$$

điều này mâu thuẫn với tính chất của x_n.

Do p là hàm cỡ "gauge-type" nên $d(x_n, x) \to 0$ và $\mathrm{diam} S_n \to 0$. Hơn nữa, vì X là đủ, nên tồn tại duy nhất $x_\varepsilon \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} S_n$ thỏa (i). Dễ thấy $x_n \to x_\varepsilon$. Với mỗi $q \ge 1$ ta có

$$F(x_0) \subseteq F(x_q) + \sum_{j=0}^{q-1} \delta_j p(x_j, x_q)k_0 + K$$

$$\subseteq F(x_\varepsilon) + \sum_{j=0}^{q} \delta_j p(x_j, x_\varepsilon)k_0 + \delta_n p(x_n, x)k_0 + K$$

Cho $q \to +\infty$ ta được (ii).

Với mỗi $x \ne x_\varepsilon$, ta suy ra $x_\varepsilon \notin \bigcap_{n=0}^{+\infty} S_n$, nên tồn tại i để $x \notin S_i$, tức là

$$F(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_i)k_0 \not\subset F(x) + \sum_{j=0}^{i} \delta_j p(x_j, x)k_0 + K.$$

Do đó

$$F(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_i)k_0 \not\subset F(x) + \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_j p(x_j, x)k_0 + K \quad (1)$$

Mặt khác, với mỗi $q \ge i$ ta luôn có,

$$F(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_i)k_0 + K \subseteq F(x_q) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_q)k_0 + K$$

$$\subseteq F(x_\varepsilon) + \sum_{j=0}^{q} \delta_j p(x_j, x_\varepsilon)k_0 + K$$

Cho $q \to +\infty$ ta được,

$$F(x_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \delta_j p(x_j, x_i)k_0 + K \subseteq F(x_\varepsilon) + \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_j p(x_j, x_\varepsilon)k_0 + K \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được (iii).

Trường hợp 2: Giả sử rằng $\delta_t > 0, \delta_l = 0$ với mọi $l > t \geq 0$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\delta_i > 0$ với mọi $i \leq t$. Do đó, với $n \leq t$, ta xác định x_n, S_n như trường hợp trên. Với $n > t$ theo Bổ đề 3.5 với $\phi(\cdot) := \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, \cdot), \xi := \frac{\varepsilon\delta_t}{2^n \delta_0}$ và $S := S_{n-1}$, ta luôn có thể chọn $x_n \in S_{n-1}$ sao cho với mọi $x \in S_{n-1}$ thì

$$F(x_n) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x_n) k_0 \not\subset F(x) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x) k_0 + \frac{\varepsilon\delta_t}{2^n \delta_0} k_0 + K,$$

và $S_n := \{ x \in S_{n-1} : F(x_n) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x_n) k_0 \subseteq F(x)$

$+\sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x) k_0 + \delta_t p(x_n, x) k_0 + K$

Do $x_n \in S_n$ nên S_n khác rỗng. Hơn nữa, áp dụng Bổ đề 4.4 với $\phi(\cdot) := \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, \cdot) + \delta_t p(x_n, \cdot)$ và $a := x_n$ ta được S_n là đóng. Ta có, với mọi $x \in S_n$ thì $p(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}$ .Thật vậy, nếu $p(x_n, x) > \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}$ thì

$$F(x_n) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x_n) k_0 \subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x) k_0$$

$$+\delta_t p(x_n, x) k_0 + K \subseteq F(x) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x) k_0 + \frac{\varepsilon\delta_t}{2^n \delta_0} k_0 + K,$$

điều này mâu thuẫn với tính chất của x_n . Chứng minh tương tự như Trường hợp 1, ta được (i) và (ii). Nhưng với $x \neq x_\varepsilon$, ta suy ra tồn tại $N_0 > t$ thỏa $x \notin S_{N_0}$, tức là

$$F(x_{N_0}) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x_{N_0}) k_0 \not\subset F(x) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x) k_0$$

$$+\delta_t p(x_{N_0}, x) k_0 + K . \quad (3)$$

Mặt khác, vì $x_\varepsilon \in S_{N_0}$ nên

$$F(x_{N_0}) + \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x_{N_0}) k_0 \subseteq F(x_\varepsilon)$$

$$+\sum_{j=0}^{t-1} \delta_j p(x_j, x_\varepsilon) k_0 + \delta_t p(x_{N_0}, x_\varepsilon) k_0 + K . \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta được (iii').

Nhận xét 3.1. Trong trường hợp đặc biệt, $Y := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, K := \mathbb{R}_+, k_0 := 1$ và F là ánh xạ đơn trị thì Định lý 3.3 chính là Định lý 1 trong (*Li, Shi, 2000*). Trong Định lý 3.3, ta có thể thay hàm cỡ "gauge-type" p bởi hàm $q : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ với q thỏa điều kiện:

(i) $q(x,x) = 0$, $\forall x \in X$,

(ii') với mỗi $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ thỏa $\forall x, y \in X$ thì $q(x,y) < \delta$ suy ra $d(x,y) < \varepsilon$,

(iii) q là hàm liên tục.

Trong trường hợp này, nếu ta thay p bởi q thì Định lý 3.3 vẫn đúng và mang tính tổng quát hơn Định lý 2.5.2 và Định lý 2.5.5 trong (*Borwein, Zhu, 2005*) với $Y := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, K := \mathbb{R}_+, k_0 := 1$ và F là ánh xạ đơn trị.

Định lý 3.6. Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K \subseteq Y$ là một nón lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Giả sử p là hàm cỡ "gauge-type". Lấy $F : X \to 2^Y$ là một hàm K-lsc tựa bị chặn dưới, cho $\lambda > 0$ và $q \geq 1$. Khi đó với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ sao cho $F(x_0) \not\subset F(x) + \varepsilon k_0 + K$, thì tồn tại một dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ tới $x_\varepsilon \in X$ và một hàm $\phi : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n p^q(x_n, x)$, với $\mu_n > 0, \forall n$ và $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1$ sao cho

(i) $p(x_n, x_\varepsilon) \leq \lambda, \forall n$, ,

(ii) $F(x_0) \not\subset F(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^q} \phi(x_\varepsilon) k_0 + K$,

(iii) $F(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda^q} \phi(x_\varepsilon) k_0 \not\subset F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda^q} \phi(x) k_0 + K, \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}$

Chứng minh. Lấy $\{\mu_n\}$ là dãy số dương thỏa $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1$. Theo Định lý 3.3 với $\delta_n = \mu_n, \forall n,$ và $p(x,x)$ được thay bởi $\frac{\varepsilon}{\lambda^q} p^q(\cdot,\cdot)$, thì tồn tại dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ về $x_\varepsilon \in X$ và hàm $\psi : X \to \mathbb{R}$ với dạng

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^q} \right) p^q(x_n, x) = \frac{\varepsilon}{\lambda^q} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n p^q(x_n, x),$$

thỏa điều kiện (i)-(iii) của Định lý 3.3. Đặt $\phi(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n p^q(x_n, x)$, áp dụng (ii) và (iii) của Định lý 3.3 và , với mọi $x \in X$, ta suy ra được (ii) và (iii) của Định lý 3.6.

Ta chứng minh với mọi n thì $p(x_n, x_\varepsilon) \le \lambda.$ Thật vậy, từ $\delta_0 = \mu_0 = 1$ và $\left(\frac{\varepsilon}{\lambda^q}\right) p^q(x_n, x) \le \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}$, ta có $p^q(x_n, x) \le \frac{\lambda^q}{2^n \delta_0} < \lambda^q$ do đó $p(x_n, x_\varepsilon) \le \lambda.$

Nhận xét 3.2. Định lý 3.6 tổng quát hơn Định lý 2.5.3 trong (*Borwein, Zhu, 2005*) với $Y := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, K := \mathbb{R}_+, k_0 := 1$, p là khoảng cách mêtric và F là ánh xạ đơn trị. Khi X là không gian Banach thì Định lý 3.3 ta suy ra định lý sau đây.

Định lý 3.7. Cho X là không gian Banach, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K \subseteq Y$ là một nón lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Lấy $F : X \to 2^Y$ là một hàm K-lsc tựa bị chặn dưới. Lấy $\{\delta_n\}$ là một dãy số thực không âm với $\delta_0 > 0$. Giả sử rằng $p : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ là một hàm nửa liên tục dưới thỏa

(a) $p(0) = 0,$

(b) $\forall \{t_n\} \subseteq X, p(t_n) \to 0 \Rightarrow \|t_n\| \to 0$.

Khi đó với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ sao cho $F(x_0) \not\subset F(x) + \varepsilon k_0 + K,$ thì tồn tại một dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ tới $x_\varepsilon \in X$ và một hàm $\psi : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n p(x - x_n),$ sao cho

(i) $p(x_\varepsilon - x_n) \le \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \forall n,$

(ii) $F(x_0) \subseteq F(x_\varepsilon) + \psi(x_\varepsilon) k_0 + K,$

$F(x_\varepsilon) + \psi(x_\varepsilon) k_0 \not\subset F(x) + \psi(x) k_0, \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}$

Hơn nữa, nếu $\delta_t > 0$ và $\delta_l = 0$ với mọi $l > t \ge 0$ thì (iii) có thể viết lại dưới dạng

(iii’) $\forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}$, $\exists N_0 \ge t$ và hàm $\psi_{t-1} : X \to \mathbb{R}$ với dạng $\psi_{t-1}(x) = \sum_{n=1}^{t-1} \delta_n p(x - x_n)$, sao cho $F(x_\varepsilon) + \psi_{t-1}(x_\varepsilon) k_0 + \delta_t p(x_\varepsilon - x_{N_0}) \not\subset F(x)$ $+ \psi_{t-1}(x) k_0 + \delta_t p(x - x_{N_0}) k_0 + K.$

Nhận xét 3.3. Trong trường hợp đặc biệt, nếu F là ánh xạ đơn trị thì Định lý 3.7 là Định lý 2 trong (*Li, Shi, 2000*).

Định lý 3.8 (Nguyên lý biến phân Ekeland tổng quát) Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K \subseteq Y$ là một nón lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Lấy $F : X \to 2^Y$ là một hàm K-lsc tựa bị chặn dưới và $\lambda > 0$. Giả sử p là w-distance (*Kada et al., 1996*) thỏa $p(x, x) = 0$ với mọi $x \in X$. Khi đó với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ sao cho $F(x_0) \not\subset F(x) + \varepsilon k_0 + K,$ thì tồn tại $x_\varepsilon \in X$ thỏa

(i) $p(x_0, x_\varepsilon) \le \lambda,$

(ii) $F(x_0) \subseteq F(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda} k_0 + K,$

(iii) $F(x_\varepsilon) \not\subset F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} p(x, x_\varepsilon) k_0 + K, \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}.$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.3 với $\delta_0 = 1, \delta_n = 0$ với $n = 1, 2, ...$ và hàm $\frac{\varepsilon}{\lambda} p(\cdot, \cdot)$ thay cho $p(\cdot, \cdot)$, khi đó tồn tại $x_\varepsilon \in X$ thỏa (i)-(iii) của Định lý 3.8.

Nhận xét 3.4. Định lý 3.8 tổng quát hơn Định lý 3.1 trong (*Ha, 2005*) với p là khoảng cách mêtric.

Định lý 3.9. (Nguyên lý biến phân Ekeland tổng quát). Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian Hausdorff lồi địa phương, $K \subseteq Y$ là một nón lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K \setminus \{0\}$. Lấy $F : X \to 2^Y$ là một hàm K-lsc tựa bị chặn dưới và $\lambda > 0, q \ge 1$. Giả sử p là hàm cỡ “gauge-type”. Khi đó với mọi $x_0 \in X$ và số dương tùy ý $\varepsilon > 0$ sao cho $F(x_0) \not\subset F(x) + \varepsilon k_0 + K,$ thì tồn tại $x_\varepsilon \in X$ thỏa

(i) $p(x_0, x_\varepsilon) \le \lambda$,

(ii) $F(x_0) \subseteq F(x_\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda^q} k_0 + K$,

(iii) $F(x_\varepsilon) + \dfrac{\varepsilon}{\lambda^q} p^q(x, x_\varepsilon) k_0 \not\subset F(x)$

$$+ \frac{\varepsilon}{\lambda^q} p^q(x_0, x) k_0 + K, \forall x \in X \setminus \{x_\varepsilon\}.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.3 với $\delta_0 = 1, \delta_n = 0$ với $n = 1, 2, ...$ và hàm $\dfrac{\varepsilon}{\lambda^q} p^q(\cdot, \cdot)$ thay cho $p(\cdot, \cdot)$, khi đó tồn tại $x_\varepsilon \in X$ thỏa (i)-(iii) của Định lý 3.9.

Nhận xét 3.5. Định lý 3.9 tổng quát hơn Định lý 2.4.1 trong (*Borwein, Zhu, 2005*) với $X = \mathbb{R}^n$ là một không gian Euclide, $Y = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $K = \mathbb{R}_+$, $k_0 = 1$, $p(x, y) = \|x - y\|$ và F là ánh xạ đơn trị.

Dưới đây chúng tôi đưa ra thí dụ để minh họa cho kết quả của Định lý 3.8 – 3.9 là mở rộng thực sự của Định lý 3.1 trong (*Ha, 2005*) và Định lý 2.4.1 trong (*Borwein, Zhu, 2005*).

Thí dụ 3.1.

Cho $X = Y = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$, $k_0 = 2$,

$$p(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{khi } x \ge y, \\ 2(y - x) & \text{khi } x < y \end{cases}.$$

Xét ánh xạ đa trị $F(x) = \begin{cases} (-1, 1) & \text{khi } x = 0, \\ (0, 2) & \text{khi } x \ne 0 \end{cases}$

và $\varepsilon = \lambda = 1$, $x_0 = 1$.

Khi đó F là hàm K-lsc tựa bị chặn dưới; p là w-distance và cũng là hàm cỡ "gauge-type". Dễ dàng kiểm tra các giả thiết của Định lý 3.8 và Định lý 3.9 thỏa mãn, do đó tồn tại $x_\varepsilon \in X$ thỏa (i)-(iii). Dựa vào tính toán trực tiếp ta có $x_\varepsilon = 0$ thỏa (i)-(iii). Tuy nhiên, trong trường hợp này p không là hàm khoảng cách mêtric (vi phạm điều kiện đối xứng) nên không thể áp dụng Định lý 3.1 trong (*Ha, 2005*), cũng như không thể áp dụng Định lý 2.4.1 trong (*Borwein, Zhu, 2005*).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Borwein, J.M. and D. Preiss, 1987. A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions. Transactions of the American Mathematical Society. 303: 517-527.
2. Borwein, J.M. and Q.J. Zhu, 2005. Techniques of Variational Analysis. Canadian Mathemtical Society Series, Springer. 353 pp.
3. Deville, R., G. Godefroy and V. Zizler, 1993. A smooth variational principle with applicatons to Hamilton–Jacobi equations in infinite dimentions. Journal of Functional Analysis. 111: 197-212.
4. Ha, T.X.D, 2005. Some variants of Ekeland's variational principle for a set-valued map. Journal of Optimization Theory and Applications. 124: 187-206.
5. Kada, O., T. Suzuki and W. Takahashi, 1996. Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces. Mathematical Japonica. 44: 381-391.
6. Khanh, P.Q. and D.N. Quy, 2011. On generalized Ekeland's variational principle and equivalent formulations for set-values mappings, Journal of Global Optimization. 4: 381-396.
7. Khanh, P.Q. and D.N. Quy, 2013. Versions of Ekeland's variational principle involving set perturbations. Journal of Global Optimization. 57: 951-968.
8. Kuroiwa, D., 2001. On set-valued optimization. Nonlinear Analysis. 47: 1395-400.
9. Li, Y.X. and S.Z Shi, 2000. A generalization of Ekeland's ε-variational principle and of its Borwein-Preiss smooth version. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 246: 308-319.
10. Stegall C., 1978. Optimization of functions on certain subsets of Banach spaces. Mathematische Annalen. 236: 171-176.