Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.110

GIẢI THỨC TỐI TIỂU CHO ĐẠI SỐ STEENROD $\mathcal{A}_3$ TẠI NHỮNG BẬC TRONG $t \leq 30$

Phạm Bích Như*
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Phạm Bích Như (email: pbnhu@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 22/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 16/06/2022
Ngày duyệt đăng: 20/06/2022

Title:
A minimal resolution for Steenrod algebra $\mathcal{A}_3$ at internal degrees $t \leq 30$

Từ khóa:
Dãy phổ Adams, đại số Steenrod, giải thức Adams tự do, lọc

Keywords:
Adams free resolution, Adams spectral sequence, filtration, Steenrod algebra

ABSTRACT

An important issue in the study of the classification problem with the type homotopy of topological spaces is the identification of the homotopy group, especially the stable homotopy group of spheres. Adams spectral sequence will be converged on the 3-torsion component of the stable homotopy group of spheres $\pi_*^S(\mathbb{S}^0)$. The E_2-term of the Adams spectral sequence is cohomology of the mod 3 Steenrod algebra $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3)$. To compute the E_2-term of the Adams spectral sequence, we need to compute $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3) = H^{*,*}(\mathrm{Hom}(P_*, \mathbb{F}_3), \delta)$ for any free $\mathcal{A}$ -module resolution of $\mathbb{F}_3$. In this paper, a free resolution P_* for internal degrees $t \leq 30$ was constructed.

TÓM TẮT

Một vấn đề quan trọng trong nghiên cứu bài toán phân loại kiểu đồng luân của các không gian tôpô là xác định nhóm đồng luân, đặc biệt là nhóm đồng luân ổn định của mặt cầu. Dãy phổ Adams hội tụ về thành phần 3-xoắn của nhóm đồng luân ổn định của mặt cầu $\pi_*^S(\mathbb{S}^0)$. Trang E_2 của dãy phổ Adams chính là đối đồng điều của đại số Steenrod $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3)$. Để tính trang E_2 của dãy phổ Adams, ta cần tính $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3) = H^{*,*}(\mathrm{Hom}(P_*, \mathbb{F}_3), \delta)$ cho giải thức $\mathcal{A}$ -mô đun tự do bất kỳ của $\mathbb{F}_3$. Trong bài báo này, giải thức tự do P_* đối với những bậc trong $t \leq 30$ được xây dựng.

1. GIỚI THIỆU

Một số ký hiệu được sử dụng trong bài viết được quy ước như sau:

$\mathcal{A}_p$: Đại số Steenrod trên trường nguyên tố p.

$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$: Đối đồng điều của đại số Steenrod trên trường nguyên tố $\mathbb{F}_p$.

$\mathrm{Tor}_s^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$: Đồng điều của đại số Steenrod trên trường nguyên tố $\mathbb{F}_p$.

$E_r^{s,t}$: Dãy phổ Adams.

$H^n(X, \mathbb{F}_p)$: Đối đồng điều bậc n của X.

$\mathcal{A}\{g_{s,i}\}$: $\mathcal{A}$-mô đun tự do sinh bởi các phần tử $g_{s,i}$.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\_,\_)$: Hàm tử Hom

$\sum^s$: Treo bậc s.

$\mathrm{Ker}(\partial)$: Nhân của đồng cấu ∂.

$\mathrm{Im}(\partial)$: Ảnh của đồng cấu ∂.

Việc tính toán đối đồng điều của đại số Steenrod, ký hiệu $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ (với p là số nguyên tố), là một vấn đề trọng tâm của Tôpô đại số. Trang E_2 của dãy phổ Adams chính là đối đồng điều của đại số Steenrod. Kể từ khi ra đời, bài toán này đã trở thành một đề tài hấp dẫn, thu hút nhiều nhà toán học quan tâm và nghiên cứu. Từ những năm 60 của thế kỷ XX, các nhà toán học đã có nhiều công trình nghiên cứu về $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{*,*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$, tiêu biểu có các công trình của Adams (1958), Wang (1967), May (1970), Tangora (1970), Lin and Mahowald (1998), Bruner et al. (2005), Lin (2008) và nhiều công trình khác.

Có nhiều công cụ và nhiều phương pháp tiếp cận để nghiên cứu đối đồng điều của đại số Steenrod như đại số vi phân phân bậc Lambda (Bousfield, 1966; Wang, 1967; Priddy, 1970; Singer, 1983; Lin, 2008; Chen, 2011), dãy phổ May (May, 1964, 1966; Tangora, 1970; Chơn và Hà, 2012, 2014), các công cụ bất biến modular và giải thức tối tiểu (Bruner, 2009; Rognes, 2012, 2015).

Việc tính toán giải thức tối tiểu cũng đã được quan tâm nghiên cứu bởi một số nhà toán học, cụ thể như Rognes (2012, 2015) đã tính được giải thức tối tiểu với bậc trong $t \leq 20$ với trường hợp $p = 2$ và bậc $t < 16$ với trường hợp $p = 3$. Bruner and Rognes (2021) đã đề cập đến việc sử dụng giải thức tối tiểu để tính $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ với $s \leq 100$ và $t \leq 200$. Tuy nhiên, kết quả tính toán không được trình bày một cách tường minh. Cùng năm, Nassau (2021) đề xuất thuật toán tính giải thức tối tiểu trên đại số Steenrod với $p = 2$. Có thể nói, việc tính toán giải thức tối tiểu cho trường hợp p là số nguyên tố lẻ vẫn còn là một bài toán mở.

Trong bài viết này, giải thức tối tiểu của trang E_2 của dãy phổ Adams cho đại số Steenrod $\mathcal{A}_3$ tại những bậc trong $t \leq 30$ đã được tính.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Trang E_2 của dãy phổ Adams

Dựa trên công trình của Rognes (2012), ta có

Định nghĩa 1: Giải thức Adams của phổ Y là một biểu đồ của phổ

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y^2 \arrow[r] \arrow[d, "j"] & Y^1 \arrow[r] \arrow[d, "j"] & Y^0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"] & Y \\
 & K^2 \arrow[ul, dashed, "\partial"] & K^1 \arrow[ul, dashed, "\partial"] & K^0 \arrow[ul, dashed, "\partial"] &
\end{tikzcd}$$

trong đó $\partial: K^s \to \sum Y^{s+1}$ với mỗi $s \geq 0$ sao cho

(a) **Mỗi biểu đồ**

$$Y^{s+1} \xrightarrow{i} Y^s \xrightarrow{j} K^s \xrightarrow{\partial} \sum Y^{s+1}$$

là một dãy đối thớ đồng luân.

(b) Mỗi phổ K^s giao hoán với treo của phổ Eilenberg-Mac Lane mod p là bị chặn dưới và kiểu hữu hạn.

Mỗi ánh xạ $j: Y^s \to K^s$ cảm sinh một toàn cấu $j^*: HY^s \to HK^s$ trong đối đồng điều mod p.

Bổ đề 2: Cho giải thức Adams tùy ý, đặt

$$P_s = H^*(\textstyle\sum^s K^s),$$
$$\partial_s = \partial^* j^*: H^*(\textstyle\sum^s K^s) \to H^*(\textstyle\sum^{s-1} K^{s-1})$$

và $\varepsilon = j^*: H^*K^0 \to H^*Y$. Khi đó, biểu đồ

$$\cdots \to P_s \xrightarrow{\partial_s} P_{s-1} \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} H^*Y \to 0$$

là một giải thức của H^*Y bởi $\mathcal{A}$ -mô đun tự do, bị chặn dưới và có kiểu hữu hạn. Viết tắt giải thức trên như sau $\epsilon: P_* \to H^*Y$. Nếu P_* là các $\mathcal{A}$ -mô đun tự do thì giải thức $\epsilon: P_* \to H^*Y$ được gọi là giải thức tự do của H^*Y.

Các đồng cấu ∂_s và ε bảo toàn phân bậc đồng điều của P_s và H^*Y, các phân bậc này được gọi là *bậc trong* và được ký hiệu bởi t.

Định nghĩa 3: Một phần tử trong dãy phổ Adams $E_r^{s,t}$ được gọi là có bậc lọc s, bậc tổng $t - s$ và bậc trong t. Một phần tử trong $F^s \subset \pi^*(Y)$ được gọi là lọc Adams lớn hơn hoặc bằng s.

Định lý 4: Trang E_2 của dãy phổ Adams của Y là

$$E_2 = \mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(H^*(Y), \mathbb{F}_2).$$

Đặc biệt, trang E_2 không phụ thuộc vào sự lựa chọn giải thức Adams.

2.2. Đại số Steenrod trên trường $\mathbb{F}_3$

Dựa trên các công trình của Ravenel (1986), Milnor (1958), Steenrod (1962) và có một số kết quả được tính toán mới tại những bậc trong t lớn hơn những kết quả đã có trong các công trình này, ta có:

Định nghĩa 5: Cho X là một không gian tôpô trên trường $\mathbb{F}_3$. Các toán tử đối đồng điều tác động một cách tự nhiên trên đối đồng điều của không gian tôpô X

$$P^i: H^n(X, \mathbb{F}_3) \to H^{n+4i}(X, \mathbb{F}_3)$$

được gọi là lũy thừa Steenrod với mọi $i \geq 0, n \geq 0$. Các toán tử này thỏa mãn

- $P^0(x) = x$,
- $P^i(x) = \begin{cases} x^3 \text{ nếu } \deg(x) = 2i \\ 0 \text{ nếu } \deg(x) < 2i \end{cases}$,
- $P^k(xy) = \sum_{i+j=k} P^i(x) P^j(y)$ (Công thức Cartan),

với $x, y \in H^n(X, \mathbb{F}_3)$ và $\deg(x)$ là bậc của x.

Định nghĩa 6: Đại số Steenrod $\mathcal{A}_3$ là một $\mathbb{F}_3$-đại số phân bậc, kết hợp, có đơn vị trên trường $\mathbb{F}_3$ sinh bởi các phần tử $P^i, i \geq 0$ bậc $4i$ và β bậc 1, thỏa mãn $P^0 = 1, \beta^2 = 0$ và các quan hệ Adem như sau:

$$P^i P^j = \sum_{t=0}^{[i/3]} (-1)^{i+t} \binom{2(j-t)-1}{i-3t} P^{i+j-t} P^t$$

với $i < 3j$

và

$$P^i \beta P^j = \sum_{t=0}^{[i/3]} (-1)^{i+t} \binom{2(j-t)}{i-3t} \beta P^{i+j-t} P^t - \sum_{t=0}^{[(i-1)/3]} (-1)^{i-1+t} \binom{2(j-t)-1}{i-3t-1} P^{i+j-t} \beta P^t$$

với $i \leq 3j$

trong đó $\binom{a}{b}$ là hệ số nhị thức lấy mod 3; Ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của x, đó là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Ở đây, toán tử Bockstein β là đồng cấu nối sinh ra từ dãy khớp

$$0 \to \mathbb{Z}/3 \to \mathbb{Z}/3^2 \to \mathbb{Z}/3 \to 0,$$

nghĩa là $\beta: H^n(X, \mathbb{Z}/3) \to H^{n+1}(X, \mathbb{Z}/3)$.

Trong $\mathcal{A}_3$, cho $I = (\varepsilon_0, i_1, \varepsilon_1, \cdots, i_s, \varepsilon_s), \varepsilon_i = 0{,}1$, $i_j \geq 0$, ta định nghĩa một đơn thức độ dài s có dạng

$$P^I = \beta^{\varepsilon_0} P^{i_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{i_2} \cdots \beta^{\varepsilon_{s-1}} P^{i_s} \beta^{\varepsilon_s}.$$

Đơn thức P^I được gọi là chấp nhận được nếu $i_j \geq 3i_{j+1} + \varepsilon_j, j \geq 1$.

Bậc của đơn thức P^I, ký hiệu $\deg(P^I)$, được định nghĩa bởi

$$\deg(P^I) = 4(i_1 + i_2 + \cdots + i_s) + (\varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_s).$$

Mệnh đề 7: Tập hợp tất cả các đơn thức chấp nhận được là một cơ sở của đại số Steenrod $\mathcal{A}_3$ ($\mathcal{A}_3$ được xem như là không gian véctơ phân bậc trên $\mathbb{F}_3$) và cơ sở này được gọi là cơ sở chấp nhận được.

Khi đó, ta có cơ sở chấp nhận được có bậc trong $t \leq 30$ của $\mathcal{A}_3$ là

P^0 (bậc 0);
β (bậc 1);
P^1 (bậc 4);
$\beta P^1, P^1\beta$ (bậc 5);
$\beta P^1 \beta$ (bậc 6);
P^2 (bậc 8);
βP^2, $P^2\beta$ (bậc 9);
$\beta P^2 \beta$ (bậc 10);
P^3 (bậc 12);
βP^3, $P^3\beta$ (bậc 13);
$\beta P^3 \beta$ (bậc 14);
P^3P^1, P^4 (bậc 16);
$\beta P^3 P^1$, $P^3 P^1 \beta$, βP^4, $P^4 \beta$ (bậc 17);
$\beta P^4 \beta$, $\beta P^3 P^1 \beta$ (bậc 18);
P^5, $P^4 P^1$ (bậc 20);
βP^5, $P^5 \beta$, $\beta P^4 P^1$, $P^4 \beta P^1$, $P^4 P^1 \beta$ (bậc 21);
$\beta P^5 \beta$, $\beta P^4 \beta P^1$, $P^4 \beta P^1 \beta$, $\beta P^4 P^1 \beta$ (bậc 22);
$\beta P^4 \beta P^1 \beta$ (bậc 23);
P^6, $P^5 P^1$ (bậc 24);
βP^6, $P^6 \beta$, $\beta P^5 P^1$, $P^5 \beta P^1$, $P^5 P^1 \beta$ (bậc 25);
$\beta P^6 \beta$, $\beta P^5 \beta P^1$, $\beta P^5 P^1 \beta$, $P^5 \beta P^1 \beta$ (bậc 26);
$\beta P^5 \beta P^1 \beta$ (bậc 27);
P^7, $P^6 P^1$ (bậc 28);
βP^7, $P^7 \beta$, $\beta P^6 P^1$, $P^6 \beta P^1$, $P^6 P^1 \beta$ (bậc 29);
$\beta P^7 \beta$, $\beta P^6 \beta P^1$, $P^6 \beta P^1 \beta$, $\beta P^6 P^1 \beta$ (bậc 30).

Quan hệ Adem với $t \leq 30$

$P^1 P^1 = 2P^2$;
$P^2 P^1 = 0$;
$P^1 \beta P^1 = \beta P^2 + P^2 \beta$;
$P^1 \beta P^2 = 2\beta P^3 + P^3 \beta$;
$P^1 P^3 = P^4$;
$P^1 P^2 = 0$;
$P^2 \beta P^1 = \beta P^3 + 2P^3 \beta$;
$P^3 P^2 = P^4 P^1 + 2P^5$;
$P^1 \beta P^3 = P^4 \beta$;
$P^2 \beta P^2 = 0$;
$P^3 \beta P^1 = \beta P^3 P^1$;
$P^3 \beta P^2 = 2\beta P^5 + \beta P^4 P^1$;
$P^2 P^3 = P^5$;
$P^2 P^2 = 0$;
$P^2 \beta P^3 = P^5 \beta$;
$P^1 \beta P^4 = \beta P^5 + P^5 \beta$;
$P^1 P^4 = 2P^5$;
$P^1 P^5 = 0$;
$P^1 \beta P^5 = P^6 \beta + 2\beta P^6$;
$P^3 P^3 = 2P^6 + P^5 P^1$;
$P^1 \beta P^6 = P^7 \beta$;
$P^2 P^4 = 0$;
$P^2 \beta P^4 = 2P^6 \beta + \beta P^6$;
$P^3 \beta P^3 = \beta P^5 P^1 + P^6 \beta + \beta P^6$;
$P^1 P^6 = P^7$;
$P^2 P^5 = 0$;
$P^4 \beta P^2 = P^5 \beta P^1 + \beta P^5 P^1 + 2P^6 \beta + \beta P^6$;
$P^3 P^4 = P^6 P^1 + P^7$;
$P^4 P^3 = 2P^7$;
$P^5 P^2 = 0$;
$P^5 \beta P^2 = 2P^6 \beta P^1 + \beta P^6 P^1$;
$P^2 \beta P^5 = 0$;
$P^3 \beta P^4 = \beta P^6 P^1 + \beta P^7$;
$P^4 \beta P^3 = P^6 \beta P^1 + 2P^7 \beta + 2\beta P^6 P^1$;
$P^2 P^6 = P^8$.

3. KẾT QUẢ CHÍNH

Dựa trên công trình của Bruner (2009), Rognes (2012, 2015), các tính toán đã mở rộng ở những bậc trong lớn hơn. Cụ thể, giải thức tự do của $\mathbb{F}_3$ được xây dựng tại những bậc trong $t \leq 30$.

$$\cdots \to P_s \xrightarrow{\partial_s} P_{s-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{F}_3 \to 0.$$

Một cách tổng quát, ta sẽ ký hiệu $g_{s,i}$ là phần tử sinh thứ i+1 trong lọc s, bắt đầu từ $i = 0$ theo thứ tự không giảm của bậc trong *t*.

Phần tử sinh đầu tiên $i = 0$ của các lọc s đều có dạng $g_{s,0} = \beta g_{s-1,0}$ và điều kiện đủ để bổ sung thêm các phần tử sinh vào P_s với $1 < s \leq 30$ là chọn ảnh của các phần tử trong P_s qua ánh xạ ∂_s nhưng không thuộc $\mathrm{Ker}(\partial_{s-1})$. Riêng điều kiện đủ để bổ sung thêm các phần tử sinh vào P_1 là chọn ảnh của các phần tử trong P_1 qua ánh xạ ∂_1 nhưng không thuộc $\mathrm{Ker}(\epsilon)$**.**

Tại tất cả các lọc bậc *s*, ta đều có

$$\partial_s(P^I g_{s,0}) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \varepsilon_s = 1 \\ P^I \beta g_{s-1,0} \text{ nếu } \varepsilon_s = 0 \end{cases} \quad (1),$$

với $I = (\varepsilon_0, i_1, \varepsilon_1, \cdots, i_s, \varepsilon_s)$, $\varepsilon_i = 0,1$, $i_j \geq 0$, $\deg(I) \leq 30$.

Ta bắt đầu xây dựng các lọc s với $0 \leq s \leq 30$.

3.1. Lọc $s = 0$

Ta có toàn cấu $\epsilon: P_0 \to \mathbb{F}_3$, đặt $P_0 = \mathcal{A}\{g_{0,0}\} \cong \mathcal{A}_3$ là $\mathcal{A}$ -mô đun tự do sinh bởi phần tử $g_{0,0}$ với bậc trong 0. Ký hiệu $g_{0,0} = P^0 = 1$.

Cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ được cho bởi cơ sở chấp nhận được $P^I g_{0,0} = P^I$, có độ dài lớn hơn hoặc bằng 1. Danh sách cơ sở chấp nhận được có bậc trong $t \leq 30$ của $\mathcal{A}_3$ đã được liệt kê ở mục 2.2.

3.2. Lọc $s = 1$

Xét toàn cấu $\partial_1: P_1 \to \mathrm{Ker}(\epsilon)$, ở đây $\mathrm{Ker}(\epsilon) = I(\mathcal{A})$. Đặt $g_{1,0} = [\beta]$ là phần tử sinh đầu tiên của P_1.

Khi đó ta tính $P^I \circ g_{1,0}$ với $I = (\varepsilon_0, i_1, \varepsilon_1, \cdots, i_s, \varepsilon_s)$, $\epsilon_j = 0, 1$, $i_j \geq 0$ và $\deg(I) \leq 29$, kết quả ta được như (1).

Lớp đầu tiên không thuộc vào $\mathcal{A}\{g_{1,0}\}$ là P^1 có bậc trong là 4, vì thế ta phải thêm phần tử sinh thứ hai $g_{1,1} = [P^1]$ của P_1 thỏa $\partial_1(g_{1,1}) = P^1$. Sử dụng quan hệ Adem để tính ảnh của $P^I g_{1,1}$ qua ∂_1, khi đó ta có

$P^0 g_{1,1} \mapsto P^1$;
$\beta g_{1,1} \mapsto \beta P^1$;
$P^1 g_{1,1} \mapsto 2P^2$;
$\beta P^1 g_{1,1} \mapsto 2\beta P^2$;
$P^1 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^2 + P^2 \beta$;
$\beta P^1 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^2 \beta$;
$P^2 g_{1,1} \mapsto 0$;
$\beta P^2 g_{1,1} \mapsto 0$;
$P^2 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^3 + 2P^3 \beta$;
$\beta P^2 \beta g_{1,1} \mapsto 2\beta P^3 \beta$;
$P^3 g_{1,1} \mapsto P^3 P^1$;
$\beta P^3 g_{1,1} \mapsto \beta P^3 P^1$;
$P^3 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^3 P^1$;
$\beta P^3 \beta g_{1,1} \mapsto 0$;
$P^3 P^1 g_{11} \mapsto 2P^4 P^1 + P^5$;
$P^4 g_{1,1} \mapsto P^4 P^1$;
$\beta P^3 P^1 g_{11} \mapsto 2\beta P^4 P^1 + \beta P^5$;
$P^3 P^1 \beta g_{1,1} \mapsto 2\beta P^5 + \beta P^4 P^1 + P^4 P^1 \beta + 2P^5 \beta$;
$\beta P^4 g_{1,1} \mapsto \beta P^4 P^1$;
$P^4 \beta g_{1,1} \mapsto P^4 \beta P^1$;
$\beta P^4 \beta g_{1,1} P^4 \beta P^1$;
$\beta P^3 P^1 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^4 P^1 \beta + 2\beta P^5 \beta$;
$P^5 g_{1,1} \mapsto P^5 P^1$;
$P^4 P^1 g_{1,1} \mapsto P^5 P^1$;
$\beta P^5 g_{1,1} \mapsto \beta P^5 P^1$;
$P^5 \beta g_{1,1} \mapsto P^5 \beta P^1$;
$\beta P^4 P^1 g_{1,1} \mapsto \beta P^5 P^1$;
$P^4 \beta P^1 g_{1,1} \mapsto 2P^5 \beta P^1 + 2\beta P^5 P^1 + P^6 \beta + \beta P^6$;
$P^4 P^1 \beta g_{1,1} \mapsto P^5 \beta P^1 + \beta P^5 P^1 + 2P^6 \beta + P^6 + 2P^5 P^1 \beta$;
$\beta P^5 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^5 \beta P^1$;
$\beta P^4 \beta P^1 g_{1,1} \mapsto 2\beta P^5 \beta P^1 + \beta P^6 \beta$;
$P^4 \beta P^1 \beta g_{1,1} \mapsto P^5 \beta P^1 \beta + \beta P^5 P^1 \beta + P^6 \beta$;
$\beta P^4 P^1 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^5 \beta P^1 + 2\beta P^6 \beta + 2\beta P^5 P^1 \beta$;
$\beta P^4 \beta P^1 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^5 \beta P^1 \beta$;
$P^6 g_{1,1} \mapsto P^6 P^1$;
$P^5 P^1 g_{1,1} \mapsto 0$;
$\beta P^6 g_{1,1} \mapsto \beta P^6 P^1$;
$P^6 \beta g_{1,1} \mapsto P^6 \beta P^1$;
$\beta P^5 P^1 g_{1,1} \mapsto 0$;
$P^5 \beta P^1 g_{1,1} \mapsto P^6 \beta P^1 + 2\beta P^6 P^1$;
$P^5 P^1 \beta g_{1,1} \mapsto 2P^6 \beta P^1 + \beta P^6 P^1$;
$\beta P^6 \beta g_{1,1} \mapsto \beta P^6 \beta P^1$;
$\beta P^5 \beta P^1 g_{1,1} \mapsto \beta P^6 \beta P^1$;
$\beta P^5 P^1 \beta g_{1,1} \mapsto 2\beta P^6 \beta P^1$;
$P^5 \beta P^1 \beta g_{1,1} \mapsto 2P^6 \beta P^1 \beta + \beta P^6 P^1 \beta$.

Lớp P^3 không thuộc $\mathcal{A}\{g_{1,0}, g_{1,1}\}$. Vì thế ta thêm phần tử sinh thứ ba $g_{1,2} = [P^3]$ thuộc P_1 có bậc trong là 12 thỏa mãn $\partial_1(g_{1,2}) = P^3$. Sử dụng quan hệ Adem để tính ảnh của phần tử $P^I g_{1,2}$ qua ánh xạ ∂_1, ta có

$P^0 g_{1,2} \mapsto P^3$;
$\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^3$;
$P^1 g_{1,2} \mapsto P^4$;
$\beta P^1 g_{1,2} \mapsto \beta P^4$;
$P^1\beta g_{1,2} \mapsto P^4\beta$;
$\beta P^1\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^4\beta$;
$P^2 g_{1,2} \mapsto P^5$;
$\beta P^2 g_{1,2} \mapsto \beta P^5$;
$P^2\beta g_{1,2} \mapsto P^5\beta$;
$\beta P^2\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^5\beta$;
$P^3 g_{1,2} \mapsto 2P^6 + P^5P^1$;
$\beta P^3 g_{1,2} \mapsto 2\beta P^6 + \beta P^5P^1$;
$P^3\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^5P^1 + P^6\beta + \beta P^6$;
$\beta P^3\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^6\beta$;
$P^3P^1 g_{1,2} \mapsto P^6P^1 + P^7$;
$P^4 g_{1,2} \mapsto 2P^7$;
$\beta P^3P^1 g_{1,2} \mapsto \beta P^6P^1 + \beta P^7$;
$P^3P^1\beta g_{1,2} \mapsto P^6P^1\beta + P^7\beta$;
$\beta P^4 g_{1,2} \mapsto 2\beta P^7$;
$P^4\beta g_{1,2} \mapsto P^6\beta P^1 + 2P^7\beta + 2\beta P^6P^1$;
$\beta P^4\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^6\beta P^1 + 2\beta P^7\beta$;
$\beta P^3P^1\beta g_{1,2} \mapsto \beta P^6P^1\beta + \beta P^7\beta$.

Từ các kết quả trên ta suy ra một cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ bao gồm các phần tử

(bậc 2) $\beta g_{1,0}$;
(bậc 6) $P^1\beta g_{1,0}$;
(bậc 7) $\beta P^1\beta g_{1,0}$;
(bậc 9) $2P^2 g_{1,0} + (\beta P^1 + P^1\beta) g_{1,1}$;
(bậc 10) $P^2\beta g_{1,0}$; $\beta P^2 g_{1,0} + 2\beta P^1\beta g_{1,1}$;
(bậc 11) $\beta P^2\beta g_{1,0}$;
(bậc 12) $P^2 g_{1,1}$;
(bậc 13) $\beta P^2 g_{1,1}$, $2\beta g_{1,2} + P^2\beta g_{1,1} + P^3 g_{1,0}$;
(bậc 14) $P^3\beta g_{1,0}$; $(\beta P^3 + 2P^3\beta) g_{1,0} + \beta P^2\beta g_{1,1}$;
(bậc 15) $\beta P^3\beta g_{1,0}$;
(bậc 17) $(\beta P^3 + 2P^3\beta) g_{1,1}$; $P^4 g_{1,0} + 2P^1\beta g_{1,2}$;
(bậc 18) $P^3P^1\beta g_{1,0}$; $P^4\beta g_{1,0}$; $\beta P^3\beta g_{1,1}$;
$2\beta P^4 g_{1,0} + \beta P^1\beta g_{1,2}$;
(bậc 19) $\beta P^4\beta g_{1,0}$; $\beta P^3P^1\beta g_{1,0}$;
(bậc 20) $(P^3P^1 + P^4) g_{1,1} + 2P^2 g_{1,2}$;
(bậc 21) $2P^5 g_{1,0} + P^2\beta g_{1,2}$;
$(2P^4P^1 + P^5) g_{1,0} + (P^3P^1\beta + 2\beta P^4) g_{1,1} + \beta P^2 g_{1,2}$;
$(2P^4P^1 + P^5) g_{1,0} + (\beta P^3P^1 + P^3P^1\beta) g_{1,1}$;
(bậc 22) $P^5\beta g_{1,0}$; $P^4P^1\beta g_{1,0}$;
$2\beta P^4P^1 g_{1,0} + \beta P^3P^1\beta g_{1,1}$;
$\beta P^5 g_{1,0} + 2\beta P^2\beta g_{1,2}$;
(bậc 23) $\beta P^5\beta g_{1,0}$; $P^4\beta P^1\beta g_{1,0}$; $\beta P^4P^1\beta g_{1,0}$;
(bậc 24) $\beta P^4\beta P^1\beta g_{1,0}$; $(P^4P^1 + 2P^5) g_{1,1}$;
(bậc 25) $(2\beta P^5 + \beta P^4P^1) g_{1,1}$;
$P^5P^1 g_{1,0} + (P^4P^1\beta + P^4\beta P^1) g_{1,1}$;
$(2P^6 + P^5P^1) g_{1,0} + (P^4P^1\beta + 2P^5\beta) g_{1,1} + 2P^3\beta g_{1,2}$;
(bậc 26) $\beta P^6 g_{1,0}$; $P^5P^1\beta g_{1,0}$;
$\beta P^6 g_{1,0} + 2\beta P^3\beta g_{1,2}$;
$(\beta P^5P^1 + \beta P^6) g_{1,0} + (\beta P^4P^1\beta + \beta P^5\beta) g_{1,1}$;
$(2P^5\beta P^1 + 2\beta P^5P^1 + 2\beta P^6) g_{1,0} + P^4\beta P^1\beta g_{1,1}$;
$(2\beta P^6 + \beta P^5P^1) g_{1,0} + (\beta P^4P^1\beta + 2\beta P^5\beta) g_{1,1} + 2\beta P^3\beta g_{1,2}$;
(bậc 27) $\beta P^6\beta g_{1,0}$; $\beta P^5P^1\beta g_{1,0}$; $P^5\beta P^1\beta g_{1,0}$;
$\beta P^5\beta P^1 g_{1,0} + 2\beta P^4\beta P^1\beta g_{1,1}$;
(bậc 28) $\beta P^5\beta P^1\beta g_{1,0}$; $P^5P^1 g_{1,1}$;
(bậc 29) $\beta P^5P^1 g_{1,1}$; $(P^5P^1\beta + P^5\beta P^1) g_{1,1}$;
$(P^5\beta P^1 + 2P^6\beta + \beta P^6) g_{1,1}$;
$(P^6P^1 + P^7) g_{1,0} + 2P^3P^1\beta g_{1,2}$;
$2\beta P^6 g_{1,1} + (\beta P^3P^1 + \beta P^4) g_{1,2}$;
$P^7 g_{1,0} + P^5P^1\beta g_{1,1} + P^4\beta g_{1,2}$;
$(2\beta P^5P^1 + P^6\beta + 2\beta P^6 + P^5P^1\beta) g_{1,1}$;
(bậc 30) $P^7\beta g_{1,0}$; $P^6P^1\beta g_{1,0}$;
$(\beta P^5P^1\beta + \beta P^5\beta P^1) g_{1,1}$;
$(\beta P^5\beta P^1 + 2\beta P^6\beta) g_{1,1}$;
$(P^6\beta P^1 + \beta P^6P^1) g_{1,0} + P^5\beta P^1\beta g_{1,1}$;
$(P^6\beta P^1 + 2\beta P^6P^1) g_{1,0} + (P^5\beta P^1\beta + \beta P^5P^1 + \beta P^6\beta) g_{1,1}$;
$\beta P^7 g_{1,0} + \beta P^5P^1\beta g_{1,1} + \beta P^4\beta g_{1,2}$;
$2(\beta P^6P^1 + \beta P^7) g_{1,0} + \beta P^3P^1\beta g_{1,2}$.

3.3. Lọc $s = 2$

Ta định nghĩa toàn cấu $\partial_2: P_2 \to \mathrm{Ker}(\partial_1)$. Đặt $P_2 = \mathcal{A}_3\{g_{2,0}, g_{2,1}, g_{2,2}, \cdots\}$. Lớp có bậc thấp nhất trong $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ là $\beta g_{1,0} = \beta[\beta]$. Ta đặt $\partial_2(g_{2,0}) = \beta g_{1,0}$ có bậc trong bằng 2 trong P_2, khi đó $\partial_2(P^I g_{2,0})$ được cho bởi (1).

Lớp đầu tiên trong $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ mà không là ảnh của ∂_2 trong $\mathcal{A}\{g_{2,0}\}$ là $2P^2 g_{1,0} + (P^1\beta + \beta P^1) g_{1,1}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ hai $g_{2,1}$ trong P_2 có bậc 9 với $\partial_2(g_{2,1}) = 2P^2 g_{1,0} + (P^1\beta + \beta P^1) g_{1,1}$. Kết hợp với quan hệ Adem, ta tính ảnh của $g_{2,1}$ như sau

$g_{2,1} \mapsto 2P^2 g_{1,0} + (P^1\beta + \beta P^1) g_{1,1}$;
$\beta g_{2,1} \mapsto 2\beta P^2 g_{1,0} + \beta P^1\beta g_{1,1}$;

$P^1 g_{2,1} \mapsto \beta P^2 g_{1,1}; \beta P^1 g_{2,1} \mapsto 0;$
$P^1 \beta g_{2,1} \mapsto (\beta P^3 + 2P^3 \beta) g_{1,0} + \beta P^2 \beta g_{1,1};$
$\beta P^1 \beta g_{2,1} \mapsto 2\beta P^3 \beta g_{1,0};$
$P^2 g_{2,1} \mapsto (\beta P^3 + 2P^3 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^2 g_{2,1} \mapsto 2\beta P^3 \beta g_{1,1};$
$P^2 \beta g_{2,1} \mapsto \beta P^3 \beta g_{1,1};$
$\beta P^2 \beta g_{2,1} \mapsto 0;$
$P^3 g_{2,1} \mapsto (P^5 + 2P^4 P^1) g_{1,0} + (\beta P^3 P^1 + P^3 P^1 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^3 g_{2,1} \mapsto (\beta P^5 + 2\beta P^4 P^1) g_{1,0} + \beta P^3 P^1 \beta g_{1,1};$
$P^3 \beta g_{2,1} \mapsto (\beta P^5 + 2\beta P^4 P^1) g_{1,0} + \beta P^3 P^1 \beta g_{1,1};$
$\beta P^3 \beta g_{2,1} \mapsto 0; P^3 P^1 g_{2,1} \mapsto (2\beta P^5 + \beta P^4 P^1) g_{1,1};$
$P^4 g_{2,1} \mapsto P^5 P^1 g_{1,0} + (P^4 P^1 \beta + P^4 \beta P^1) g_{1,1};$
$\beta P^3 P^1 g_{2,1} \mapsto 0;$
$P^3 P^1 \beta g_{2,1} \mapsto (\beta P^5 P^1 + \beta P^6) g_{1,0} + (\beta P^4 P^1 \beta + 2\beta P^5 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^4 g_{2,1} \mapsto \beta P^5 P^1 g_{1,0} + (\beta P^4 P^1 \beta + \beta P^4 \beta P^1) g_{1,1};$
$P^4 \beta g_{2,1} \mapsto (2P^5 \beta P^1 + 2\beta P^5 P^1 + P^6 + 2\beta P^6) g_{1,0} + P^4 \beta P^1 \beta g_{1,1};$
$\beta P^4 \beta g_{2,1} \mapsto (2\beta P^5 \beta P^1 + \beta P^6 \beta) g_{1,0} + \beta P^4 \beta P^1 \beta g_{1,1};$
$\beta P^3 P^1 \beta g_{2,1} \mapsto (2\beta P^5 P^1 \beta + 2\beta P^6 \beta) g_{1,0};$
$P^5 g_{2,1} \mapsto (P^5 P^1 \beta + P^5 \beta P^1) g_{1,1};$
$P^4 P^1 g_{2,1} \mapsto (P^5 \beta P^1 + \beta P^5 P^1 + 2P^6 \beta + \beta P^6) g_{1,1};$
$\beta P^5 g_{2,1} \mapsto (\beta P^5 P^1 \beta + \beta P^5 \beta P^1) g_{1,1};$
$P^5 \beta g_{2,1} \mapsto (P^6 \beta P^1 + 2\beta P^6 P^1) g_{1,0} + P^5 \beta P^1 \beta g_{1,1};$
$\beta P^4 P^1 g_{2,1} \mapsto (\beta P^5 \beta P^1 + 2\beta P^6 \beta) g_{1,1};$
$P^4 \beta P^1 g_{2,1} \mapsto 0;$
$P^4 P^1 \beta g_{2,1} \mapsto (P^7 \beta + P^6 \beta P^1 + 2\beta P^6 P^1) g_{1,0} + (P^5 \beta P^1 \beta + \beta P^5 P^1 \beta + \beta P^6 \beta) g_{1,1}.$

Lớp thứ hai trong $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ mà không là ảnh của trong $\mathcal{A}\{g_{2,0}, g_{2,1}\}$ là $P^2 g_{1,1}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ ba $g_{2,2}$ trong P_2 có bậc 12 với $\partial_2(g_{2,2}) = P^2 g_{1,1}$. Dựa vào quan hệ Adem ta có

$g_{2,2} \mapsto P^2 g_{1,1};$
$\beta g_{2,2} \mapsto \beta P^2 g_{1,1};$
$P^1 g_{2,2} \mapsto 0;$
$\beta P^1 g_{2,2} \mapsto 0;$
$P^1 \beta g_{2,2} \mapsto (2\beta P^3 + P^3 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^1 \beta g_{2,2} \mapsto \beta P^3 \beta g_{1,1};$
$P^2 g_{2,2} \mapsto 0;$
$\beta P^2 g_{2,2} \mapsto 0;$
$P^2 \beta g_{2,2} \mapsto 0;$
$\beta P^2 \beta g_{2,2} \mapsto 0;$
$P^3 g_{2,2} \mapsto (P^4 P^1 + 2P^5) g_{1,1};$
$\beta P^3 g_{2,2} \mapsto (\beta P^4 P^1 + 2\beta P^5) g_{1,1};$
$P^3 \beta g_{2,2} \mapsto (\beta P^4 P^1 + 2\beta P^5) g_{1,1};$
$\beta P^3 \beta g_{2,2} \mapsto 0;$
$P^3 P^1 g_{2,2} \mapsto 0;$
$P^4 g_{2,2} \mapsto 2P^5 P^1 g_{1,1};$
$\beta P^3 P^1 g_{2,2} \mapsto 0;$
$P^3 P^1 \beta g_{2,2} \mapsto (2\beta P^5 P^1 + P^6 \beta + 2\beta P^6 + P^5 P^1 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^4 g_{2,2} \mapsto 2\beta P^5 P^1 g_{1,1};$
$P^4 \beta g_{2,2} \mapsto (P^5 \beta P^1 + \beta P^5 P^1 + 2P^6 \beta + \beta P^6) g_{1,1};$
$\beta P^4 \beta g_{2,2} \mapsto (\beta P^5 \beta P^1 + 2\beta P^6 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^3 P^1 \beta g_{2,2} \mapsto (\beta P^6 \beta + \beta P^5 P^1 \beta) g_{1,1}.$

Lớp thứ ba trong $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ mà không là ảnh của ∂_2 trong $\mathcal{A}\{g_{2,0}, g_{2,1}, g_{2,2}\}$ là $P^3 g_{1,0} + P^2 \beta g_{1,1} + 2\beta g_{1,2}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ tư $g_{2,3}$ trong P_2 có bậc 13 với $\partial_2(g_{2,3}) = P^3 g_{1,0} + P^2 \beta g_{1,1} + 2\beta g_{1,2}$. Theo quan hệ Adem ta có

$g_{2,3} \mapsto P^3 g_{1,0} + P^2 \beta g_{1,1} + 2\beta g_{1,2};$
$\beta g_{2,3} \mapsto \beta P^3 g_{1,0} + \beta P^2 \beta g_{1,1};$
$P^1 g_{2,3} \mapsto P^4 g_{1,0} + 2P^1 \beta g_{1,2};$
$\beta P^1 g_{2,3} \mapsto \beta P^4 g_{1,0} + 2\beta P^1 \beta g_{1,2};$
$P^1 \beta g_{2,3} \mapsto P^4 \beta g_{1,0} + 2\beta P^3 \beta g_{1,1};$
$\beta P^1 \beta g_{2,3} \mapsto \beta P^4 \beta g_{1,0};$
$P^2 g_{2,3} \mapsto P^5 g_{1,0} + 2P^2 \beta g_{1,2};$
$\beta P^2 g_{2,3} \mapsto \beta P^5 g_{1,0} + 2\beta P^2 \beta g_{1,2};$
$P^2 \beta g_{2,3} \mapsto P^5 \beta g_{1,0};$
$\beta P^2 \beta g_{2,3} \mapsto \beta P^5 \beta g_{1,0};$
$P^3 g_{2,3} \mapsto (2P^6 + P^5 P^1) g_{1,0} + (P^4 P^1 + 2P^5 \beta) g_{1,1} + 2P^3 \beta g_{1,2};$
$\beta P^3 g_{2,3} \mapsto (2\beta P^6 + \beta P^5 P^1) g_{1,0} + (\beta P^4 P^1 \beta + 2\beta P^5 \beta) g_{1,1} + 2\beta P^3 \beta g_{1,2};$
$P^3 \beta g_{2,3} \mapsto (\beta P^5 P^1 + \beta P^6) g_{1,0} + (\beta P^4 P^1 \beta + 2\beta P^5 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^3 \beta g_{2,3} \mapsto \beta P^6 \beta g_{1,0};$
$P^3 P^1 g_{2,3} \mapsto (P^6 P^1 + P^7) g_{1,0} + 2P^3 P^1 \beta g_{1,2};$
$P^4 g_{2,3} \mapsto 2P^7 g_{1,0} + 2P^5 P^1 \beta g_{1,1} + 2P^4 \beta g_{1,2};$
$\beta P^3 P^1 g_{2,3} \mapsto (\beta P^6 P^1 + \beta P^7) g_{1,0} + 2\beta P^3 P^1 \beta g_{1,2};$
$P^3 P^1 \beta g_{2,3} \mapsto (P^6 P^1 \beta + P^7 \beta) g_{1,0} + (2\beta P^5 P^1 \beta + 2\beta P^6 \beta) g_{1,1};$
$\beta P^4 g_{2,3} \mapsto 2\beta P^7 g_{1,0} + 2\beta P^5 P^1 \beta g_{1,1} + 2\beta P^4 \beta g_{1,2};$
$P^4 \beta g_{2,3} \mapsto (2P^7 \beta + P^6 \beta P^1 + 2\beta P^6 P^1) g_{1,0} + (P^5 \beta P^1 \beta + \beta P^5 P^1 \beta + \beta P^6 \beta) g_{1,1}.$

Lớp thứ tư trong $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ mà không là ảnh của ∂_2 trong $\mathcal{A}\{g_{2,0}, g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ là $(P^3P^1 + P^4)g_{1,1} + 2P^2g_{1,2}$. Ta thêm phần tử sinh thứ năm $g_{2,4}$ trong P_2 có bậc 20 với $\partial_2(g_{2,4}) = (P^3P^1 + P^4)g_{1,1} + 2P^2g_{1,2}$. Theo quan hệ Adem, ta có

$g_{2,4} \mapsto (P^3P^1 + P^4)g_{1,1} + 2P^2g_{1,2}$;
$\beta g_{2,4} \mapsto (\beta P^3P^1 + \beta P^4)g_{1,1} + 2\beta P^2g_{1,2}$;
$P^1g_{2,4} \mapsto (P^4P^1 + 2P^5)g_{1,1}$;
$\beta P^1g_{2,4} \mapsto (\beta P^4P^1 + 2\beta P^5)g_{1,1}$;
$P^1\beta g_{2,4} \mapsto (P^4\beta P^1 + \beta P^5 + P^5\beta)g_{1,1} + (\beta P^3 + 2P^3\beta)g_{1,2}$;
$\beta P^1\beta g_{2,4} \mapsto (\beta P^4\beta P^1 + \beta P^5\beta)g_{1,1} + 2\beta P^3\beta g_{1,2}$;
$P^2g_{2,4} \mapsto P^5P^1g_{1,1}$;
$\beta P^2g_{2,4} \mapsto \beta P^5P^1g_{1,1}$;
$P^2\beta g_{2,4} \mapsto (P^5\beta P^1 + 2P^6\beta + \beta P^6)g_{1,1}$;
$\beta P^2\beta g_{2,4} \mapsto (\beta P^5\beta P^1 + 2\beta P^6\beta)g_{1,1}$.

Lớp thứ năm trong $\mathrm{Ker}(\partial_1)$ mà không là ảnh của ∂_2 trong $\mathcal{A}\{g_{2,0}, g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}, g_{2,4}\}$ là $(2P^4P^1 + P^5)g_{1,0} + (P^3P^1\beta + 2\beta P^4)g_{1,1} + \beta P^2g_{1,2}$. Ta thêm phần tử sinh thứ sáu $g_{2,5}$ trong P_2 có bậc 21 với $\partial_2(g_{2,5}) = (2P^4P^1 + P^5)g_{1,0} + (P^3P^1\beta + 2\beta P^4)g_{1,1} + \beta P^2g_{1,2}$. Theo quan hệ Adem, ta tính được kết quả

$g_{2,5} \mapsto (2P^4P^1 + P^5)g_{1,0} + (P^3P^1\beta + 2\beta P^4)g_{1,1} + \beta P^2g_{1,2}$;
$\beta g_{2,5} \mapsto (2\beta P^4P^1 + \beta P^5)g_{1,0} + \beta P^3P^1\beta g_{1,1}$;
$P^1g_{2,5} \mapsto P^5P^1g_{1,0} + (P^4P^1\beta + \beta P^5 + P^5\beta)g_{1,1} + (2\beta P^3 + P^3\beta)g_{1,2}$;
$\beta P^1g_{2,5} \mapsto \beta P^5P^1g_{1,0} + (\beta P^4P^1\beta + \beta P^5\beta)g_{1,1} + \beta P^3\beta g_{1,2}$;
$P^1\beta g_{2,4} \mapsto (2\beta P^5P^1 + P^5\beta P^1)g_{1,0} + P^4\beta P^1\beta g_{1,1}$;
$\beta P^1\beta g_{2,4} \mapsto \beta P^5\beta P^1g_{1,0} + \beta P^4\beta P^1\beta g_{1,1}$;
$P^2g_{2,5} \mapsto (P^5P^1\beta + 2P^6\beta + \beta P^6)g_{1,1}$;
$\beta P^2g_{2,5} \mapsto (\beta P^5P^1\beta + 2\beta P^6\beta)g_{1,1}$;
$P^2\beta g_{2,4} \mapsto (P^6\beta + 2\beta P^6)g_{1,0} + P^5\beta P^1\beta g_{1,1}$.

Cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ bao gồm

(bậc 3) $\beta g_{2,0}$;
(bậc 7) $P^1\beta g_{2,0}$;
(bậc 8) $\beta P^1\beta g_{2,0}$;
(bậc 11) $P^2\beta g_{2,0}$;
(bậc 12) $\beta P^2\beta g_{2,0}$;
(bậc 13) $P^1g_{2,1} + 2\beta g_{2,2}$;
(bậc 14) $P^3g_{2,0} + P^1\beta g_{2,1} + 2\beta g_{2,3}$; $\beta P^1g_{2,1}$;
(bậc 15) $P^3\beta g_{2,0}$; $\beta P^3g_{2,0} + \beta P^1\beta g_{2,1}$;
(bậc 16) $\beta P^3\beta g_{2,0}$; $P^1g_{2,2}$;
(bậc 17) $\beta P^1g_{2,2}$; $P^2g_{2,1} + P^1\beta g_{2,2}$;
(bậc 18) $(\beta P^2 + P^2\beta)g_{2,1}$; $\beta P^2g_{2,1} + \beta P^1\beta g_{2,2}$;
$2P^4g_{2,0} + P^2\beta g_{2,1} + P^1\beta g_{2,3}$;
(bậc 19) $P^3P^1\beta g_{2,0}$; $P^4\beta g_{2,0}$; $\beta P^2g_{2,1}$;
$\beta P^4g_{2,0} + 2\beta P^1\beta g_{2,3}$;
(bậc 20) $\beta P^4\beta g_{2,0}$; $\beta P^3P^1\beta g_{2,0}$; $P^2g_{2,2}$;
(bậc 21) $\beta P^2g_{2,2}$; $P^2\beta g_{2,2}$; $(\beta P^2 + P^2\beta)g_{2,2}$;
(bậc 22) $\beta P^2\beta g_{2,2}$; $(\beta P^3 + 2P^3\beta)g_{2,1}$;
$P^5g_{2,0} + 2P^2\beta g_{2,3}$; $2\beta P^3g_{2,1} + \beta P^2g_{2,3}$;
(bậc 23) $P^5\beta g_{2,0}$; $P^4P^1\beta g_{2,0}$; $\beta P^3\beta g_{2,1}$;
$\beta P^5g_{2,0} + 2\beta P^2\beta g_{2,3}$;
(bậc 24) $\beta P^5\beta g_{2,0}$; $P^4\beta P^1\beta g_{2,0}$; $\beta P^4P^1\beta g_{2,0}$;
(bậc 25) $\beta P^4\beta P^1\beta g_{2,0}$; $P^3P^1g_{2,1} + 2P^3\beta g_{2,2}$;
$(\beta P^3 + 2P^3\beta)g_{2,2}$; $2P^4g_{2,1} + P^1\beta g_{2,4}$;
$P^3P^1g_{2,1} + 2\beta P^1g_{2,4}$;
(bậc 26) $\beta P^3P^1g_{2,1}$; $\beta P^3\beta g_{2,2}$;
$\beta P^3P^1g_{2,1} + 2\beta P^3\beta g_{2,2}$;
$(2P^6 + P^5P^1)g_{2,0} + P^3P^1\beta g_{2,1} + 2P^3\beta g_{2,3}$;
(bậc 27) $P^6\beta g_{2,0}$; $P^5P^1\beta g_{2,0}$;
$(2\beta P^6 + \beta P^5P^1)g_{2,0} + \beta P^3P^1\beta g_{2,1} + 2\beta P^3\beta g_{2,3}$;
$(\beta P^5P^1 + P^6\beta + \beta P^6)g_{2,0} + \beta P^3P^1\beta g_{2,1}$;
(bậc 28) $\beta P^6\beta g_{2,0}$; $\beta P^5P^1\beta g_{2,0}$; $P^5\beta P^1\beta g_{2,0}$; $P^3P^1g_{2,2}$;
(bậc 29) $\beta P^5\beta P^1\beta g_{2,0}$; $\beta P^3P^1g_{2,2}$;
$(2P^4P^1 + P^5)g_{2,1} + 2P^3P^1\beta g_{2,2}$;
$P^4P^1g_{2,1} + 2P^4\beta g_{2,2}$;
$P^4P^1g_{2,1} + (2\beta P^2 + 2P^2\beta)g_{2,4}$;
(bậc 30) $P^4\beta P^1g_{2,1}$; $\beta P^4P^1g_{2,1} + 2\beta P^4\beta g_{2,2}$;
$(2\beta P^4P^1 + \beta P^5)g_{2,1} + 2\beta P^3P^1\beta g_{2,2}$;
$(\beta P^4P^1 + 2\beta P^5 + P^4P^1\beta + 2P^5\beta)g_{2,1}$;
$(P^6P^1 + P^7)g_{2,0} + (2P^4P^1\beta + P^5\beta)g_{2,1} + 2P^3P^1\beta g_{2,3}$;
$\beta P^4P^1g_{2,1} + 2\beta P^2\beta g_{2,4}$;
$P^4g_{3,2} \mapsto 2P^7g_{2,0} + P^4P^1\beta g_{2,1} + 2P^4\beta g_{2,3}$.

3.4. Lọc $s = 3$

Ta định nghĩa toàn cấu $\partial_3 : P_3 \to Ker(\partial_2)$. Đặt $P_3 = \mathcal{A}_3\{g_{3,0}, g_{3,1}, g_{3,2}, \cdots\}$. Lớp có bậc thấp nhất trong $Ker(\partial_2)$ là $\beta g_{2,0}$. Ta đặt phần tử sinh đầu tiên $\partial_3(g_{3,0}) = \beta g_{2,0}$ có bậc trong là 3 trong P_3và $\partial_3(g_{3,0})$ được cho bởi (1).

Lớp đầu tiên trong $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ mà không là ảnh của ∂_3 trong $\mathcal{A}\{g_{3,0}\}$ là $P^1g_{2,1} + 2\beta g_{2,2}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ hai $g_{3,1} = P^1g_{2,1} + 2\beta g_{2,2}$ trong P_3 có bậc 13. Khi đó ảnh của $g_{3,1}$ qua ánh xạ ∂_3 và sử dụng quan hệ Adem ta có kết quả như sau

$\beta g_{3,1} \mapsto \beta P^1 g_{2,1}$;
$P^1 g_{3,1} \mapsto 2P^2 g_{2,1} + 2P^1 \beta g_{2,2}$;
$\beta P^1 g_{3,1} \mapsto 2\beta P^2 g_{2,1} + 2\beta P^1 \beta g_{2,2}$;
$P^1 \beta g_{3,1} \mapsto (\beta P^2 + P^2 \beta) g_{2,1}$;
$\beta P^1 \beta g_{3,1} \mapsto \beta P^2 \beta g_{2,1}$;
$P^2 g_{3,1} \mapsto 2P^2 \beta g_{2,2}$;
$\beta P^2 g_{3,1} \mapsto 2\beta P^2 \beta g_{2,2}$;
$P^2 \beta g_{3,1} \mapsto (\beta P^3 + 2P^3 \beta) g_{2,1}$;
$\beta P^2 \beta g_{3,1} \mapsto 2\beta P^3 \beta g_{2,1}$;
$P^3 g_{3,1} \mapsto P^3 P^1 g_{2,1} + 2P^3 \beta g_{2,2}$;
$\beta P^3 g_{3,1} \mapsto \beta P^3 P^1 g_{2,1} + 2\beta P^3 \beta g_{2,2}$;
$P^3 \beta g_{3,1} \mapsto \beta P^3 P^1 g_{2,1}$;
$\beta P^3 \beta g_{3,1} \mapsto 0$;
$P^3 P^1 g_{3,1} \mapsto (2P^4 P^1 + P^5) g_{2,1} + 2P^3 P^1 \beta g_{2,2}$;
$P^4 g_{3,1} \mapsto P^4 P^1 g_{2,1} + 2P^4 \beta g_{2,2}$;
$\beta P^3 P^1 g_{3,1} \mapsto (2\beta P^4 P^1 + \beta P^5) g_{2,1} + 2\beta P^3 P^1 \beta g_{2,2}$;
$P^3 P^1 \beta g_{3,1} \mapsto (\beta P^4 P^1 + 2\beta P^5 + P^4 P^1 \beta + 2P^5 \beta) g_{2,1}$;
$\beta P^4 g_{3,1} \mapsto \beta P^4 P^1 g_{2,1} + 2\beta P^4 \beta g_{2,2}$;
$P^4 \beta g_{3,1} \mapsto P^4 \beta P^1 g_{2,1}$.

Lớp thứ hai trong $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ mà không là ảnh của ∂_3 trong $\mathcal{A}\{g_{3,0}, g_{3,1}\}$ là $P^3 g_{2,0} + P^1 \beta g_{2,1} + 2\beta g_{2,3}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ ba $g_{3,2}$ trong P_3 có bậc 14 với $\partial_3(g_{3,2}) = P^3 g_{2,0} + P^1 \beta g_{2,1} + 2\beta g_{2,3}$. Dựa vào quan hệ Adem, ta có:

$\beta g_{3,2} \mapsto \beta P^3 g_{2,0} + \beta P^1 \beta g_{2,1}$;
$P^1 g_{3,2} \mapsto P^4 g_{2,0} + 2P^2 \beta g_{2,1} + 2P^1 \beta g_{2,3}$;
$\beta P^1 g_{3,2} \mapsto \beta P^4 g_{2,0} + 2\beta P^2 \beta g_{2,1} + 2\beta P^1 \beta g_{2,3}$;
$P^1 \beta g_{3,2} \mapsto P^4 \beta g_{2,0} + \beta P^2 \beta g_{2,1}$;
$\beta P^1 \beta g_{3,2} \mapsto \beta P^4 \beta g_{2,0}$;
$P^2 g_{3,2} \mapsto P^5 g_{2,0} + 2P^2 \beta g_{2,3}$;
$\beta P^2 g_{3,2} \mapsto \beta P^5 g_{2,0} + 2\beta P^2 \beta g_{2,3}$;
$P^2 \beta g_{3,2} \mapsto P^5 \beta g_{2,0} + \beta P^3 \beta g_{2,1}$;
$\beta P^2 \beta g_{3,2} \mapsto \beta P^5 \beta g_{2,0}$;
$P^3 g_{3,2} \mapsto (2P^6 + P^5 P^1) g_{2,0} + P^3 P^1 \beta g_{2,1} + 2P^3 \beta g_{2,3}$;
$\beta P^3 g_{3,2} \mapsto (2\beta P^6 + \beta P^5 P^1) g_{2,0} + \beta P^3 P^1 \beta g_{2,1} + 2\beta P^3 \beta g_{2,3}$;
$P^3 \beta g_{3,2} \mapsto (\beta P^5 P^1 + P^6 \beta + \beta P^6) g_{2,0} + \beta P^3 P^1 \beta g_{2,1}$;
$\beta P^3 \beta g_{3,2} \mapsto \beta P^6 \beta g_{2,0}$;
$P^3 P^1 g_{3,2} \mapsto (P^6 P^1 + P^7) g_{2,0} + (2P^4 P^1 \beta + P^5 \beta) g_{2,1} + 2P^3 P^1 \beta g_{2,3}$;
$P^4 g_{3,2} \mapsto 2P^7 g_{2,0} + P^4 P^1 \beta g_{2,1} + 2P^4 \beta g_{2,3}$.

Lớp thứ ba trong $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ mà không là ảnh của của ∂_3 trong $\mathcal{A}\{g_{3,0}, g_{3,1}, g_{3,2},\}$ là $P^1 g_{2,2}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ tư $g_{3,3}$ trong P_3 có bậc 16 với $\partial_3(g_{3,3}) = P^1 g_{2,2}$. Khi đó, dựa trên quan hệ Adem, ta có:

$g_{3,3} \mapsto P^1 g_{2,2}$;
$\beta g_{3,3} \mapsto \beta P^1 g_{2,2}$;
$P^1 g_{3,3} \mapsto 2P^2 g_{2,2}$;
$\beta P^1 g_{3,3} \mapsto 2\beta P^2 g_{2,2}$;
$P^1 \beta g_{3,3} \mapsto (\beta P^2 + P^2 \beta) g_{2,2}$;
$\beta P^1 \beta g_{3,3} \mapsto \beta P^2 \beta g_{2,2}$;
$P^2 g_{3,3} \mapsto 0$;
$\beta P^2 g_{3,3} \mapsto 0$;
$P^2 \beta g_{3,3} \mapsto (\beta P^3 + 2P^3 \beta) g_{2,2}$;
$\beta P^2 \beta g_{3,3} \mapsto 2\beta P^3 \beta g_{2,2}$;
$P^3 g_{3,3} \mapsto P^3 P^1 g_{2,2}$;
$\beta P^3 g_{3,3} \mapsto \beta P^3 P^1 g_{2,2}$;
$P^3 \beta g_{3,3} \mapsto \beta P^3 P^1 g_{2,2}$;
$\beta P^3 \beta g_{3,3} \mapsto 0$.

Lớp thứ tư trong $\mathrm{Ker}(\partial_2)$ mà không là ảnh của ∂_3 trong $\mathcal{A}\{g_{3,0}, g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,3}\}$ là $P^3 P^1 g_{2,1+} \beta P^1 g_{2,4}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ năm $g_{3,4}$ trong P_3 có bậc 25 với $\partial_3(g_{3,4}) = P^3 P^1 g_{2,1} + 2\beta P^1 g_{2,4}$. Dựa vào quan hệ Adem, ta có:

$\beta g_{3,4} \mapsto \beta P^3 P^1 g_{2,1}$;
$P^1 g_{3,4} \mapsto P^4 P^1 g_{2,1} + (2\beta P^2 + 2P^2 \beta) g_{2,4}$;
$\beta P^1 g_{3,4} \mapsto \beta P^4 P^1 g_{2,1} + 2\beta P^2 \beta g_{2,4}$;
$P^1 \beta g_{3,4} \mapsto P^4 \beta P^1 g_{2,1}$.

Cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\partial_3)$
(bậc 4) $\beta g_{3,0}$;
(bậc 8) $P^1 \beta g_{3,0}$;
(bậc 9) $\beta P^1 \beta g_{3,0}$;
(bậc 12) $P^2 \beta g_{3,0}$;
(bậc 13) $\beta P^2 \beta g_{3,0}$;
(bậc 16) $P^3 \beta g_{3,0}$;
(bậc 17) $\beta P^3 \beta g_{3,0}$;
(bậc 20) $P^4 \beta g_{3,0}$; $P^3 P^1 \beta g_{3,0}$;
(bậc 21) $\beta P^4 \beta g_{3,0}$; $\beta P^3 P^1 \beta g_{3,0}$;
$P^2 g_{3,1} + (\beta P^1 + P^1 \beta) g_{3,3}$;
(bậc 22) $\beta P^2 g_{3,1} + \beta P^1 \beta g_{3,3}$;
(bậc 24) $P^5 \beta g_{3,0}$; $P^4 P^1 \beta g_{3,0}$; $P^2 g_{3,3}$;
(bậc 25) $\beta P^5 \beta g_{3,0}$; $P^4 \beta P^1 \beta g_{3,0}$; $\beta P^4 P^1 \beta g_{3,0}$; $\beta P^2 g_{3,3'}$;
(bậc 26) $\beta P^4 \beta P^1 \beta g_{3,0}$;
$(2\beta P^3 + P^3 \beta) g_{3,1} + \beta P^2 \beta g_{3,3}$;
(bậc 27) $\beta P^3 \beta g_{3,1}$;
(bậc 28) $P^6 \beta g_{3,0}$; $P^5 P^1 \beta g_{3,0}$;
(bậc 29) $\beta P^6 \beta g_{3,0}$; $P^5 \beta P^1 \beta g_{3,0}$; $\beta P^5 P^1 \beta g_{3,0}$;
$(\beta P^3 + 2P^3 \beta) g_{3,3}$;

(bậc 30) $\beta P^5\beta P^1\beta g_{3,0}$; $\beta P^3\beta g_{3,3}$.

3.5. Lọc $s = 4$

Ta định nghĩa toàn cấu $\partial_4: P_4 \to \mathrm{Ker}(\partial_3)$. Đặt $P_4 = \mathcal{A}_3\{g_{4,0}, g_{4,1}, g_{4,2}, \cdots\}$

Lớp có bậc thấp nhất trong $\mathrm{Ker}(\partial_3)$ là $\beta g_{3,0}$. Ta đặt phần tử sinh đầu tiên $g_{4,0}$ của bậc 4 trong P_4, với $\partial_4(P^I g_{4,0})$ được tính như (1).

Lớp đầu tiên trong $\mathrm{Ker}(\partial_3)$ mà không là ảnh của ∂_4 trong $\mathcal{A}\{g_{4,0}\}$ là $P^2 g_{3,1} + (\beta P^1 + P^1\beta)g_{3,3}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ hai $g_{4,1}$ trong P_4 có bậc 21 với $\partial_4(g_{4,1}) = P^2 g_{3,1} + (\beta P^1 + P^1\beta)g_{3,3}$. Khi đó, ta có

$\beta g_{4,1} \mapsto \beta P^2 g_{3,1} + \beta P^1\beta g_{3,3}$;
$P^1 g_{4,1} \mapsto \beta P^2 g_{3,3}$;
$\beta P^1 g_{4,1} \mapsto 0$;
$P^1\beta g_{4,1} \mapsto (2\beta P^3 + P^3\beta)g_{3,1} + \beta P^2\beta g_{3,3}$;
$\beta P^1\beta g_{4,1} \mapsto \beta P^3\beta g_{3,1}$;
$P^2 g_{4,1} \mapsto (\beta P^3 + 2P^3\beta)g_{3,3}$;
$\beta P^2 g_{4,1} \mapsto 2\beta P^3\beta g_{3,3}$;
$P^2\beta g_{4,1} \mapsto \beta P^3\beta g_{3,3}$.

Lớp thứ hai trong $\mathrm{Ker}(\partial_3)$ mà không là ảnh của ∂_4 trong $\mathcal{A}\{g_{4,0}, g_{4,1}\}$ là $P^2 g_{3,3}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ ba $g_{4,2}$ trong P_4 có bậc 24 với $\partial_4(g_{4,2}) = P^2 g_{3,3}$ và theo quan hệ Adem, ta có:

$\beta g_{4,2} \mapsto \beta P^2 g_{3,3}$;
$P^1 g_{4,2} \mapsto 0$;
$\beta P^1 g_{4,2} \mapsto 0$;
$P^1\beta g_{4,2} \mapsto (2\beta P^3 + P^3\beta)g_{3,3}$;
$\beta P^1\beta g_{4,2} \mapsto \beta P^3\beta g_{3,3}$.

Cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\partial_4)$ gồm
(bậc 5) $\beta g_{4,0}$;
(bậc 9) $P^1\beta g_{4,0}$;
(bậc 10) $\beta P^1\beta g_{4,0}$;
(bậc 13) $P^2\beta g_{4,0}$;
(bậc 14) $\beta P^2\beta g_{4,0}$;
(bậc 17) $P^3\beta g_{4,0}$;
(bậc 18) $\beta P^3\beta g_{4,0}$;
(bậc 21) $P^3P^1\beta g_{4,0}$; $P^4\beta g_{4,0}$;
(bậc 22) $\beta P^3P^1\beta g_{4,0}$; $\beta P^4\beta g_{4,0}$;
(bậc 25) $P^4P^1\beta g_{4,0}$; $P^5\beta g_{4,0}$;
(bậc 26) $\beta P^5\beta g_{4,0}$; $P^4\beta P^1\beta g_{4,0}$; $\beta P^4P^1\beta g_{4,0}$;
$\beta P^1 g_{4,1}$;
(bậc 27) $\beta P^4\beta P^1\beta g_{4,0}$;
(bậc 28) $P^1 g_{4,2}$;
(bậc 29) $P^6\beta g_{4,0}$; $P^5P^1\beta g_{4,0}$; $\beta P^1 g_{4,2}$;
$P^2 g_{4,1} + P^1\beta g_{4,2}$;
(bậc 30) $\beta P^6\beta g_{4,0}$; $\beta P^5P^1\beta g_{4,0}$; $P^5\beta P^1\beta g_{4,0}$;
$(\beta P^2 + P^2\beta)g_{4,1}$; $\beta P^2 g_{4,1} + \beta P^1\beta g_{4,2}$.

3.6. Lọc $s = 5$

Ta định nghĩa toàn cấu $\partial_5: P_5 \to Ker(\partial_4)$. Đặt $P_5 = \mathcal{A}_3\{g_{5,0}, g_{5,1}, g_{5,2}, \ldots\}$.

Lớp có bậc thấp nhất trong $\mathrm{Ker}(\partial_4)$ là $\beta g_{4,0}$. Ta đặt phần tử sinh đầu tiên $g_{5,0}$ của bậc 5 trong P_5, với $\partial_5(P^I g_{5,0})$ như (1).

Lớp đầu tiên trong $\mathrm{Ker}(\partial_4)$ mà không là ảnh của ∂_5 trong $\mathcal{A}\{g_{5,0}\}$ là $\beta P^1 g_{4,1}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ hai $g_{5,1}$ trong P_5 có bậc 26 với $\partial_5(g_{5,1}) = \beta P^1 g_{4,1}$. Dựa vào quan hệ Adem, ta có:

$\beta g_{5,1} \mapsto 0$;
$P^1 g_{5,1} \mapsto (\beta P^2 + P^2\beta)g_{4,1}$.

Lớp thứ hai trong $\mathrm{Ker}(\partial_4)$ mà không là ảnh của ∂_5 trong $\mathcal{A}\{g_{5,0}, g_{5,1}\}$ là $P^1 g_{4,2}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ ba $g_{5,2}$ trong P_5 có bậc 28 với $\partial_5(g_{5,2}) = P^1 g_{4,2}$. Khi đó, theo quan hệ Adem, ta có:

$\beta g_{5,2} \mapsto \beta P^1 g_{4,2}$.

Lớp thứ ba trong $\mathrm{Ker}(\partial_4)$ mà không là ảnh của ∂_5 trong $\mathcal{A}\{g_{5,0}, g_{5,1}\}$ là $P^2 g_{4,1} + P^1\beta g_{4,2}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ ba $g_{5,3}$ trong P_5 có bậc 29 với $\partial_5(g_{5,3}) = P^2 g_{4,1} + P^1\beta g_{4,2}$và khi đó ta có $\beta g_{5,3} \mapsto \beta P^2 g_{4,1} + \beta P^1\beta g_{4,2}$.

Cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\partial_5)$ bao gồm:
(bậc 6) $\beta g_{5,0}$;
(bậc 10) $P^1\beta g_{5,0}$;
(bậc 11) $\beta P^1\beta g_{5,0}$;
(bậc 14) $P^2\beta g_{5,0}$;
(bậc 15) $\beta P^2\beta g_{5,0}$;
(bậc 18) $P^3\beta g_{5,0}$;
(bậc 19) $\beta P^3\beta g_{5,0}$;
(bậc 22) $P^3P^1\beta g_{5,0}$; $P^4\beta g_{5,0}$;
(bậc 23) $\beta P^3P^1\beta g_{5,0}$; $\beta P^4\beta g_{5,0}$;
(bậc 26) $P^4P^1\beta g_{5,0}$; $P^5\beta g_{5,0}$;
(bậc 27) $\beta P^5\beta g_{5,0}$; $P^4\beta P^1\beta g_{5,0}$; $\beta P^4P^1\beta g_{5,0}$;
$\beta g_{5,1}$;
(bậc 28) $\beta P^4\beta P^1\beta g_{5,0}$;
(bậc 30) $P^6\beta g_{5,0}$; $P^5P^1\beta g_{5,0}$.

3.7. Lọc $s = 6$

Ta định nghĩa toàn cấu $\partial_6: P_6 \to \mathrm{Ker}(\partial_5)$. Đặt $P_6 = \mathcal{A}_3\{g_{6,0}, g_{6,1}, \ldots\}$.

Lớp có bậc thấp nhất trong $\mathrm{Ker}(\partial_5)$ là $\beta g_{5,0}$. Ta đặt phần tử sinh đầu tiên $g_{6,0}$ của bậc 6 trong P_6, với $\partial_6(P^I g_{6,0})$ như (1).

Lớp đầu tiên trong $Ker(\partial_5)$ mà không là ảnh của ∂_6 trong $\mathcal{A}\{g_{6,0}\}$ là $\beta g_{5,1}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ hai $g_{6,1}$ trong P_6 có bậc 27 với $\partial_6(g_{6,1}) = \beta g_{5,1}$. Dựa vào quan hệ Adem, ta có: $\beta g_{6,1} \mapsto 0$.

Cơ sở cộng tính của $Ker(\partial_6)$ bao gồm:

(bậc 7) $\beta g_{6,0}$;
(bậc 11) $P^1\beta g_{6,0}$;
(bậc 12) $\beta P^1\beta g_{6,0}$;
(bậc 15) $P^2\beta g_{6,0}$;
(bậc 16) $\beta P^2\beta g_{6,0}$;
(bậc 19) $P^3\beta g_{6,0}$;
(bậc 20) $\beta P^3\beta g_{6,0}$;
(bậc 23) $P^3P^1\beta g_{6,0}$; $P^4\beta g_{6,0}$;
(bậc 24) $\beta P^3P^1\beta g_{6,0}$; $\beta P^4\beta g_{6,0}$;
(bậc 27) $P^4P^1\beta g_{6,0}$; $P^5\beta g_{6,0}$;
(bậc 28) $\beta P^5\beta g_{6,0}$; $P^4\beta P^1\beta g_{6,0}$; $\beta P^4P^1\beta g_{6,0}$; $\beta g_{6,1}$;
(bậc 29) $\beta P^4\beta P^1\beta g_{6,0}$.

3.8. Lọc $s = 7$

Ta định nghĩa toàn cấu $\partial_7: P_7 \to \mathrm{Ker}(\partial_6)$. Đặt $P_7 = \mathcal{A}_3\{g_{7,0}, g_{7,1}, ...\}$

Lớp có bậc thấp nhất trong $\mathrm{Ker}(\partial_6)$ là $\beta g_{6,0}$. Ta đặt phần tử sinh đầu tiên $g_{7,0}$ của bậc 7 trong P_7, với $\partial_7(P^I g_{7,0})$ như (1).

Lớp đầu tiên trong $\mathrm{Ker}(\partial_6)$ mà không là ảnh của ∂_7 trong $\mathcal{A}\{g_{7,0}\}$ là $\beta g_{6,1}$. Ta thêm vào phần tử sinh thứ hai $g_{7,1}$ trong P_6 có bậc 28 với $\partial_7(g_{7,1}) = \beta g_{6,1}$. Dựa vào quan hệ Adem, ta có:
$\beta g_{7,1} \mapsto 0$.

Cơ sở cộng tính của $\mathrm{Ker}(\partial_7)$ bao gồm:

(bậc 8) $\beta g_{7,0}$;
(bậc 12) $P^1\beta g_{6,0}$;
(bậc 13) $\beta P^1\beta g_{6,0}$;
(bậc 16) $P^2\beta g_{6,0}$;
(bậc 17) $\beta P^2\beta g_{6,0}$;
(bậc 20) $P^3\beta g_{6,0}$;
(bậc 21) $\beta P^3\beta g_{6,0}$;
(bậc 24) $P^3P^1\beta g_{6,0}$; $P^4\beta g_{6,0}$;
(bậc 25) $\beta P^3P^1\beta g_{6,0}$; $\beta P^4\beta g_{6,0}$;
(bậc 28) $P^4P^1\beta g_{6,0}$; $P^5\beta g_{6,0}$;
(bậc 29) $\beta P^5\beta g_{6,0}$; $P^4\beta P^1\beta g_{6,0}$; $\beta P^4P^1\beta g_{6,0}$; $\beta g_{6,1}$;
(bậc 30) $\beta P^4\beta P^1\beta g_{6,0}$.

Tiếp tục quá trình trên với $8 \le s \le 30$, ta có một toàn cấu

$$\partial_s: P_s = \mathcal{A}\{g_{s,0}, \beta g_{s,1}\} \to \mathrm{Ker}(\partial_{s-1}).$$

Định nghĩa 8: Giải thức $\varepsilon: P_* \to \mathbb{F}_3$ được gọi là một giải thức tối tiểu nếu

$$\mathrm{Im}(\partial_{s+1}) \subset I(\mathcal{A}).P_s$$

với mọi $s \ge 0$. Khi đó,

$$1 \otimes \partial_{s+1}: \mathbb{F}_3 \otimes_{\mathcal{A}} P_{s+1} \to \mathbb{F}_3 \otimes_{\mathcal{A}} P_s$$

và

$$\mathrm{Hom}(\partial_{s+1}, 1): \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_s, \mathbb{F}_3) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_{s+1}, \mathbb{F}_3)$$

là những đồng cấu không sao cho

$$\mathrm{Tor}_s^{\mathcal{A}}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3) \cong \mathbb{F}_3 \otimes_{\mathcal{A}} P_s = \mathbb{F}_3\{g_{s,i}\}_i$$

và

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^s(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_s, \mathbb{F}_3) = \mathbb{F}_3\{g_{s,i}\}_i^*,$$

với mọi $s \ge 0$. Điều này tương đương với khẳng định số phần tử sinh của P_s là nhỏ nhất tại mỗi bậc.

Từ các kết quả tính toán ở trên, ta có định lý sau đây:

Định lý 9: Tồn tại một giải thức tối tiểu $\varepsilon: P_* \to \mathbb{F}_3$ với $P_0 = \mathcal{A}\{g_{0,0}\}$ và $P_s = \mathcal{A}\{g_{s,i} | i \ge 0\}$, trong đó $\partial_s: P_s \to P_{s-1}$ được cho trong những bậc trong $t \le 30$ bởi

$\partial_1(g_{1,0}) = \beta g_{0,0}$;
$\partial_1(g_{1,1}) = P^1 g_{0,0}$;
$\partial_1(g_{1,2}) = P^3 g_{0,0}$;
$\partial_2(g_{2,0}) = \beta g_{1,0}$;
$\partial_2(g_{2,1}) = 2P^2 g_{1,0} + (P^1\beta + \beta P^1)g_{1,1}$;
$\partial_2(g_{2,2}) = P^2 g_{1,1}$;
$\partial_2(g_{2,3}) = P^3 g_{1,0} + P^2\beta g_{1,1} + 2\beta g_{1,2}$;
$\partial_2(g_{2,4}) = (P^3P^1 + P^4)g_{1,1} + 2P^2 g_{1,2}$;
$\partial_2(g_{2,5}) = (2P^4P^1 + P^5)g_{1,0} + (P^3P^1\beta + 2\beta P^4)g_{1,1} + \beta P^2 g_{1,2}$;
$\partial_3(g_{3,0}) = \beta g_{2,0}$;
$\partial_3(g_{3,1}) = P^1 g_{2,1} + 2\beta g_{2,2}$;
$\partial_3(g_{3,2}) = P^3 g_{2,0} + P^1\beta g_{2,1} + 2\beta g_{2,3}$;
$\partial_3(g_{3,3}) = P^1 g_{2,2}$;
$\partial_3(g_{3,4}) = P^3P^1 g_{2,1} + 2\beta P^1 g_{2,4}$;
$\partial_4(g_{4,0}) = \beta g_{3,0}$;
$\partial_4(g_{4,1}) = P^2 g_{3,1} + (\beta P^1 + P^1\beta)g_{3,3}$;
$\partial_4(g_{4,2}) = P^2 g_{3,3}$;
$\partial_5(g_{5,0}) = \beta g_{4,0}$;
$\partial_5(g_{5,1}) = \beta P^1 g_{4,1}$;
$\partial_5(g_{5,2}) = P^1 g_{4,2}$;
$\partial_5(g_{5,3}) = P^2 g_{4,1} + P^1\beta g_{4,2}$;
$\partial_5(g_{5,0}) = \beta g_{4,0}$;
$\partial_6(g_{6,0}) = \beta g_{5,0}$;

$\partial_6(g_{6,1}) = \beta g_{5,1}$;
$\partial_7(g_{7,0}) = \beta g_{6,0}$;
$\partial_7(g_{7,1}) = \beta g_{6,1}$;
$\partial_8(g_{8,0}) = \beta g_{7,0}$;
$\partial_8(g_{8,1}) = \beta g_{7,1}$;
$\cdots$
$\partial_s(g_{s,0}) = \beta g_{s-1,0}$;
$\partial_s(g_{s,1}) = \beta g_{s-1,1}$.

4. KẾT LUẬN

Trong bài viết này, các tính toán tường minh của giải thức tối tiểu cho đại số Steenrod $\mathcal{A}_3$ tại những bậc trong $t \leq 30$ bằng tay đã được trình bày cụ thể. Nghiên cứu được kỳ vọng có thể tổng quát kết quả cho những bậc lớn hơn và áp dụng cho trường hợp tổng quát với p là số nguyên tố lẻ. Các kết quả này có thể được sử dụng để nghiên cứu đối đồng điều của đại số Steenrod trên trường $\mathbb{F}_p$ với p là số nguyên tố lẻ.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, mã số: T2022-32.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Adams, J. F. (1958). On the structure and applications of the Steenrod algebra. *Commentarii Mathematici Helvetici, 32*(1), 180-214. https://doi.org/10.1007/BF02564578

Adem, J. (1952). The Iteration of the Steenrod Squares in Algebraic Topology. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 38*(8), 720–726. https://doi.org/10.1073/pnas.38.8.720

Bousfield, A. K., Curtis, E. B., Kan, D. M., Quillen, D. G., Rector, D. L., & Schlesinger, J. W. (1966). The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence. *Topology, 5,* 331–342. https://doi.org/10.1016/0040-9383(66)90024-3

Bruner, R. R., Hà, L. M., & Hưng, N. H. V. (2005). On the behavior of the algebraic transfer. *Transactions of the American Mathematical Society*, *357*(2), 473–487. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03661-X

Bruner, R. R. (2009). *An Adams Spectral Sequence Primer*. Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit MI 48202-3489, USA. https://www.rrb.wayne.edu/papers/adams.pdf

Bruner, R. R., & Rognes, J. (2021). *The Adams spectral sequence for topological modular forms*. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 253, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/surv/253

Chen, T. W. (2011). Determination of $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{5,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$. *Topology and its Applications*, *158*, 660-689. https://doi.org/10.1016/j.topol.2011.01.002

Chơn, P. H., & Hà, L. M. (2012). On May spectral sequence and the algebraic transfer. *Manuscripta mathematica*, *138*, 141-160. https://doi.org/10.1007/s00229-011-0487-0

Chơn, P. H., & Hà, L. M. (2014). On the May spectral sequence and the algebraic transfer II. *Topology and its Applications*, *178*, 372-383. https://doi.org/10.1016/j.topol.2014.10.013

Lin, W. H., & Mahowald, M. (1998). The Adams spectral sequence for Minami's theorem. *Contemporary Mathematics*, *220*, 143-177. https://doi.org/10.1090/conm/220/03098

Lin, W. H. (2008). $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{4,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$ and $\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{5,*}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2)$. *Topology and its Applications*, *155*(5), 459–496. https://doi.org/10.1016/j.topol.2007.11.003

May, J. P. (1964). *The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras; applications to the Steenrod algebra* (doctoral dissertation). Princeton University.

May, J. P. (1966). The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras. *Journal of Algebra*, *3*, 123-146. https://doi.org/10.1016/0021-8693(66)90009-3

May, J. P. (1970). A general algebraic approach to Steenrod operations. *In the Steenrod Algebra and its Applications: a conference to celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday, Battelle Memorial institute, Columbus, Ohio, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 168,* Springer, Berlin, 153-231. https://doi.org/10.1007/BFb0058524

Milnor, J. (1958). The Steenrod algebra and its dual, *Annals of Mathematics*, *67*, 150-171. https://doi.org/10.2307/1969932

Nassau, C. (2021). Computing a minimal resolution over the Steenrod algebra. *Le Matematiche*, *76*(1), 3–18. https://doi:10.4418/2021.76.1.1

Priddy, S. B. (1970). Koszul resolutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, *152*(1), 39-60. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1970-0265437-8

Rognes, J. (2012). *The Adams Spectral Sequence*. University of Chicago Press. https://www.mn.uio.no/math/personer/vit/rognes/papers/notes.050612.pdf

Rognes, J. (2015). *Introduction to the Adams Spectral Sequence*. Algbraic Topology III- Mat 9580 – Spring. https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT9580/v15/undervisningsmateriale/adams-sp-seq.010615.pdf

Singer, W. M. (1983). Invariant theory and the Lambda algebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, *280*(2), 673–693. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0716844-7

Steenrod, N. E. (1962). *Cohomology operations.* Lecture by N. E. Steenrod, written and revised by D. B. A. Epstein, Annals of Mathematics Studies, vol.50, Princeton University Press, Princeton New Jersey.

Tangora, M. C. (1970). On the cohomology of the Steenrod algebra. *Mathematische Zeitschrift*, *116*, 18-64. https://doi.org/10.1007/BF01110185

Wang, J. S. P. (1967). On the cohomology of the mod-2 Steenrod algebra and the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Illinois Journal of Mathematics*, *11*, 480-490. https://doi.org/10.1215/ijm/1256054570