Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.109

ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO CẬN SAI SỐ HÖLDER CHỨA THAM SỐ

Nguyễn Duy Cường[1*], Đỗ Hồng Diễm[2], Nguyễn Tử Thịnh[1], Nguyễn Minh Trọng[3] và Nguyễn Mai Nhật Dương[4]

[1]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Y dược Cần Thơ*

[3]*Tổ Toán, Trường THPT Hoàng Thái Hiếu, Vĩnh Long*

[4]*Tổ Toán, Trường THPT Che Guevara, Bến Tre*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Duy Cường (email: ndcuong@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 21/05/2022
Ngày nhận bài sửa: 11/06/2022
Ngày duyệt đăng: 14/06/2022

Title:
Sufficient conditions for Hölder parametric error bounds

Từ khóa:
Cận sai số chứa tham số, dưới vi phân, độ dốc, nguyên lý biến phân Ekeland

Keywords:
Parametric error bounds, subdifferential, slope, Ekeland variational principle

ABSTRACT

The article studies sufficient conditions for Hölder parametric error bounds of lower semicontinuous functions in metric and Asplund spaces. These conditions are presented in terms of primal and dual space elements. The main tools of our analysis are the Ekeland variational principle and Fréchet subdifferential sum rule in Asplund spaces. The established results are applied to study sufficient conditions for the Hölder metric regularity property of set-valued mappings.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, đề tài được nghiên cứu là các điều kiện đủ cho các hàm nửa liên tục dưới có cận sai Hölder chứa tham số trên không gian mêtric và Asplund. Các điều kiện được trình bày dưới dạng các phần tử trên không gian nền và không gian đối ngẫu. Công cụ chính của nghiên cứu này là nguyên lý biến phân Ekeland và quy tắc tổng cho dưới vi phân Fréchet trên không gian Asplund. Các kết quả này được dùng để nghiên cứu điều kiện đủ cho tính chính quy mêtric Hölder của ánh xạ đa trị.

1. GIỚI THIỆU

Việc nghiên cứu cận sai số xuất phát từ việc vận dụng các thuật toán để giải các bài toán tối ưu hóa bằng máy tính. Trong trường hợp tổng quát, các thuật toán này thường không trả về một nghiệm chính xác, ví dụ như thuật toán phép chiếu luân phiên để tìm phần tử thuộc phần chung của hai tập hợp. Do đó, khi vòng lặp dừng lại tại một bước nào đó và trả về một điểm, thì một thông tin rất quan trọng mà máy tính cần biết là điểm đó có "tốt" (tức là có gần tập nghiệm) hay không để đưa ra quyết định cho vòng lặp kế tiếp.

Cận sai số cung cấp thông tin về cận trên của khoảng cách giữa một điểm với tập nghiệm của bài toán tối ưu. Tùy theo cấu trúc của bài toán đang xét mà tập nghiệm có thể là một đa diện được biểu diễn bởi hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính, hay tổng quát hơn, là tập nghiệm của các bài toán tối ưu phi tuyến không trơn và không lồi. Thông tin về cận sai số hoàn toàn có thể kiểm soát được, đó là vì việc ước lượng cho các cận trên của khoảng cách từ một điểm đến tập nghiệm thì có thể thực hiện được, trong khi việc tìm được chính xác tập nghiệm của bài toán tối ưu tổng quát nói chung là rất khó. Chính vì vậy, lý thuyết về cận sai số được ứng dụng rộng rãi trong tối ưu hoá: bài toán về độ nhạy (Jourani, 2000), bài toán về đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán (Dao & Phan, 2019).

Khái niệm về cận sai số được đề xuất bởi Hoffman (1952). Tác giả đã chứng minh được sự tồn tại cận sai số tuyến tính toàn cục cho các hàm số affine trong không gian hữu hạn chiều.

Trong việc nghiên cứu các điều kiện đủ cho cận sai số của hàm thực suy rộng, có hai hướng tiếp cận. Hướng thứ nhất là giả sử tập nghiệm của bài toán thỏa mãn một số tính chất cho trước như: điều kiện Slater, điều kiện bị chặn, điều kiện Abadie và một số điều kiện khác (Pang, 1997). Hướng thứ hai là khảo sát các điểm nằm bên ngoài tập nghiệm. Công cụ chính để nghiên cứu bài toán dạng này là lý thuyết về Giải tích biến phân hiện đại. Ioffe (1979) đã vận dụng Nguyên lý biến phân Ekeland (1974) và quy tắc tổng chính xác cho các dưới vi phân Clarke để đưa ra các kết quả về sự tồn tại cận sai số toàn cục cho hàm liên tục Lipschitz địa phương trong không gian Banach.

Cách tiếp cận trên của Ioffe là hoàn toàn dựa trên cấu trúc của không gian đối ngẫu. Azé et al. (2002) đã đưa ra một hướng tiếp cận mới về việc thiết lập điều kiện đủ cho cận sai số trên không gian nền. Cụ thể, các tác giả đã khai thác cấu trúc của không gian mêtric thông qua khái niệm độ dốc được đề xuất bởi De Giorgi et al. (1980). So với điều kiện đủ trên không gian đối ngẫu, điều kiện đủ trên không gian nền yếu hơn và thường dễ kiểm tra hơn. Trong trường hợp hàm số đang xét là hàm lồi trong không gian định chuẩn, thì hai điều kiện trên là tương đương.

Việc nghiên cứu cận sai số chứa tham số trong trường hợp tuyến tính được đề xuất bởi Jourani (2000). Cụ thể, Jourani đã đưa ra các điều kiện đủ trong không gian đối ngẫu bằng cách áp dụng nguyên lý biến phân Ekeland và quy tắc tổng chính xác cho các dưới vi phân trong không gian Banach. Các tham số trong mô hình này được xem như các đại lượng nhiễu. Do đó, cận sai số chứa tham số đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu tốc độ hội tụ của các thuật toán dùng để giải bài toán tối ưu với dữ liệu nhiễu.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, X là một không gian mêtric hoặc định chuẩn với khoảng cách được kí hiệu tương ứng là $d(\cdot,\cdot)$ và $\|\cdot\|$, Y là một tập khác rỗng. Không gian đối ngẫu của không gian định chuẩn X được kí hiệu là X^*. Ta kí hiệu $B_\delta(x)$ cho hình cầu mở tâm x với bán kính $\delta > 0$ và B^* cho hình cầu đơn vị mở trong không gian đối ngẫu. Tập hợp các số thực và tập hợp số thực suy rộng được kí hiệu lần lượt là $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}_\infty \coloneqq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Cho trước $\alpha \in \mathbb{R}$, ta kí hiệu $\alpha_+ := \max\{0, \alpha\}$.

Ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ giữa hai tập hợp X, Y là một ánh xạ mà trong đó với mỗi $x \in X$, ta xác định $F(x)$ là một tập con của Y. Miền hữu hiệu và đồ thị của F được kí hiệu là $\operatorname{dom} F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ và $\operatorname{gph} F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$. Ánh xạ ngược của F được xác định bởi $F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)$ với mọi $y \in Y$. Dễ thấy $\operatorname{dom} F^{-1} = F(X)$.

Cho Ω là một tập con của không gian mêtric X, khoảng cách từ $x \in X$ đến Ω được định nghĩa là $d(x, \Omega) := \inf_{u\in\Omega} d(u, x)$, và ta quy ước $d(x, \emptyset) = +\infty$. Cho hàm thực suy rộng $f: X \to \mathbb{R}_\infty$, miền hữu hiệu của f được kí hiệu là $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$. Hàm số f được gọi là nửa liên tục dưới tại $x \in \operatorname{dom} f$ nếu $\liminf_{u\to x} f(u) \geq f(x)$.

Bổ đề 2.1

Cho X là không gian mêtric, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ và $x \in \operatorname{dom} f$. Hàm số f nửa liên tục dưới tại x khi và chỉ khi $\liminf_{u\to x} f(u) = f(x)$.

Chứng minh

Theo định nghĩa của liminf, ta luôn có $f(x) \geq \liminf_{u\to x} f(u)$. Kết hợp với tính nửa liên tục dưới của f tại x, ta có điều phải chứng minh. ■

Bổ đề 2.2 (Ekeland, 1974)

Cho X là không gian mêtric đủ, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ là hàm nửa liên tục dưới trên X, $x \in X$, $\varepsilon > 0$ và $\lambda > 0$. Nếu $f(x) < \inf_X f + \varepsilon$, khi đó tồn tại $\hat{x} \in X$ thoả:

(i) $d(\hat{x}, x) < \lambda$;

(ii) $f(\hat{x}) \leq f(x)$;

(iii) $f(u) + (\varepsilon/\lambda) d(u, \hat{x}) \geq f(\hat{x})$, $\forall u \in X$.

Định nghĩa 2.1 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ và $x \in \operatorname{dom} f$. Dưới vi phân Fréchet của f tại x, được kí hiệu là $\partial^F f(x)$, là tập hợp tất cả các phần tử $x^* \in X^*$ thoả

$$\liminf_{x\to\bar{x}} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x\rangle}{\| u - x \|} \geq 0.$$

Bổ đề 2.3 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ và $x \in \mathrm{dom} f$. Nếu x là một điểm cực tiểu địa phương của f thì $0 \in \partial^F f(x)$.

Bổ đề 2.4

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian định chuẩn. Khi đó:

(i) $\partial^F \|\cdot\| (0) = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \le 1\}$;

(ii) $\partial^F \|\cdot\| (x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = \| x \|, \|x^*\| = 1\}$ nếu $x \neq 0$.

Chứng minh

(i) Xem chứng minh của Ví dụ 2.38 (Mordukhovich & Nam, 2014).

(ii) Xem chứng minh của Ví dụ 3.2.7 (Lucchetti, 2006). ■

Nhận xét 2.1

Do hàm khoảng cách trong không gian định chuẩn là hàm lồi, nên dưới vi phân Fréchet trong Bổ đề 2.4 được hiểu theo nghĩa dưới vi phân trong Giải tích lồi.

Bổ đề 2.5 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$, $x \in \mathrm{dom} f$ và $\lambda > 0$. Khi đó $\partial^F \lambda f(x) = \lambda\, \partial^F f(x)$.

Định nghĩa 2.2 (Phelps, 1993)

Cho X là không gian Banach. Khi đó X là không gian Asplund nếu mọi hàm lồi liên tục trên một tập lồi mở đều khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của nó.

Một lớp các không gian Asplund có nhiều ứng quan trọng là không gian Banach phản xạ (ví dụ không gian Hilbert).

Bổ đề 2.6 (Fabian, 1989)

Cho X là không gian Asplund, $f_1, f_2: X \to \mathbb{R}_\infty$ và $x \in \mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2$. Nếu f_1 là hàm liên tục Lipschitz và f_2 là hàm nửa liên tục dưới trên một lân cận của x. Khi đó với bất kỳ $x^* \in \partial^F (f_1 + f_2)(x)$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_1, x_2 \in X$ với $||x_i - x|| < \varepsilon$ và $|f_i(x_i) - f_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1,2)$ thoả

$$x^* \in \partial^F f_1(x_1) + \partial^F f_2(x_2) + \varepsilon B^*.$$

Định nghĩa 2.3 (De Giorgi et al.,1980)

Cho X là không gian mêtric, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ và $x \in \mathrm{dom} f$. Độ dốc của f tại x là

$$|\nabla f|(x) := \limsup_{u \to x, u \neq x} \frac{[f(x) - f(u)]_+}{d(u,x)}.$$

Nhận xét 2.2

(i) Độ dốc của hàm số tại một điểm cho ta biết tốc độ thay đổi nhanh nhất của hàm số tại điểm đó.

(ii) Nếu f là hàm khả vi Fréchet trong không gian định chuẩn X, thì độ dốc của hàm số tại một điểm bằng chuẩn của toán tử đạo hàm tại điểm đó, tức là $|\nabla f|(x) = \|\nabla f(x)\|$.

(iii) Nếu x là điểm cực tiểu địa phương của hàm số f thì $|\nabla f|(x) = 0$.

Mệnh đề 2.1 (Cuong & Kruger, 2022)

Cho X là không gian định chuẩn, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ và $x \in \mathrm{dom} f$. Khi đó:

(i) $|\nabla f|(x) \le d(0, \partial^F f(x))$. Đẳng thức xảy ra khi f là hàm lồi.

(ii) Nếu X là không gian Asplund và f là hàm nửa liên tục dưới tại x thì

$$|\nabla f|(x) \ge \limsup_{u \to x, f(u) \to f(x)} d(0, \partial^F f(x)).$$

Định nghĩa 2.4

Cho X là không gian mêtric, Y là tập khác rỗng, $f: X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$ và $(x,y) \in \mathrm{dom} f$. Độ dốc riêng phần của f theo x tại (x,y) là

$$|\nabla_x f|(x,y) := \limsup_{u \to x, u \neq x} \frac{[f(x,y) - f(u,y)]_+}{d(u,x)}.$$

Định nghĩa 2.5

Cho X là không gian định chuẩn, Y là tập khác rỗng, $f: X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$ và $(x,y) \in \mathrm{dom} f$. Dưới vi phân Fréchet riêng phần của f theo x tại (x,y), được kí hiệu là $\partial_x^F f(x,y)$, là tập hợp tất cả các phần tử $x^* \in X^*$ thoả

$$\liminf_{u \to x} \frac{f(u,y) - f(x,y) - \langle x^*, u - x\rangle}{\| u - x \|} \ge 0.$$

Nhận xét 2.3

Trong Định nghĩa 2.4 và 2.5, với y cho trước, nếu ta đặt $g(\cdot) := f(\cdot, y)$ thì

$$|\nabla g|(x) = |\nabla_x f|(x,y) \text{ và } \partial^F g(x) = \partial_x^F f(x,y).$$

Do đó độ dốc riêng phần và dưới vi phân Fréchet riêng phần thoả mãn tất cả các tính chất của độ dốc và dưới vi phân thông thường.

Bổ đề 2.7

Cho X là không gian mêtric, Y là tập khác rỗng, $f: X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$, $(x,y) \in \mathrm{dom}\, f$ với $f(x,y) > 0$, $f(\cdot, y)$ là một hàm nửa liên tục dưới tại x và $q > 0$. Khi đó:

$$|\nabla_x f^q|(x,y) = q f^{q-1}(x,y) |\nabla_x f|(x,y).$$

Chứng minh

Nếu x là một điểm cực tiểu địa phương của hàm $f(\cdot,y)$ thì x cũng là điểm cực tiểu địa phương của hàm $f^q(\cdot,y)$, và do đó $|\nabla_x f^q|(x,y) = |\nabla_x f|(x,y) = 0$. Giả sử x không là điểm cực tiểu địa phương của hàm $f(\cdot,y)$. Do hàm số $f(\cdot,y)$ là nửa liên tục dưới tại x, nên theo Bổ đề 2.1 ta có:

$$\liminf_{u\to x, u\neq x} f(u,y) = f(x,y).$$

Khi đó

$$|\nabla_x f^q|(x,y) = \limsup_{u\to x, u\neq x} \frac{f^q(x,y) - f^q(u,y)}{d(u,x)}$$

$$= \limsup_{\substack{u\to x, u\neq x\\ f(u)<f(x)}} \frac{f^q(x,y) - f^q(u,y)}{d(u,x)}$$

$$= \limsup_{\substack{u\to x, u\neq x\\ f(u)\uparrow f(x)}} \frac{f^q(x,y) - f^q(u,y)}{d(u,x)} . \frac{f(x,y) - f(u,y)}{d(u,x)}$$

$$= qf^{q-1}(x,y) \limsup_{u\to x, u\neq x} \frac{f(x,y) - f(u,y)}{d(u,x)}$$

$$= qf^{q-1}(x,y)|\nabla_x f|(x,y). \qquad \blacksquare$$

Bổ đề 2.8

Cho X là không gian định chuẩn, Y là tập khác rỗng, $f: X\times Y \to \mathbb{R}_\infty$, $(x,y) \in \mathrm{dom} f$ với $f(x,y) > 0$, $f(\cdot,y)$ là một hàm nửa liên tục dưới tại x và $q > 0$. Khi đó:

$$\partial_x^F f^q(x,y) = qf^{q-1}(x,y)\partial_x^F f(x,y).$$

Chứng minh

Đặt $\gamma := \liminf_{u\to 0} f(x+u,y)$. Theo tính nửa liên tục dưới của hàm $f(\cdot,y)$ ta có $\gamma = f(x,y)$. Lấy $x^* \in X^*$. Do $f(x,y) > 0$, nên ta có

$$\liminf_{u\to 0} \frac{f^q(x+u,y) - f^q(x,y) - qf^{q-1}(x,y)\langle x^*, u\rangle}{\| u \|}$$

$$= \liminf_{\substack{u\to 0\\ f(x+u,y)\to f(x,y)}} \frac{f^q(x+u,y) - f^q(x,y) - qf^{q-1}(x,y)\langle x^*, u\rangle}{\| u \|}$$

$$= qf^{q-1}(x,y) \liminf_{u\to 0} \frac{f(x+u,y) - f(x,y) - \langle x^*, u\rangle}{\| u \|}.$$

Do đó $x^* \in \partial_x^F f(\mathrm{x},y)$ khi và chỉ khi $qf^{q-1}(x,y)x^* \in \partial_x^F f^q(x,y)$. Bổ đề được chứng minh xong. $\blacksquare$

Định nghĩa 2.6

Cho X là không gian mêtric, $f: X \to \mathbb{R}_\infty, \bar{x} \in [f \le 0] := \{ x \in X \mid f(x) \le 0 \}$ và $q > 0$. Hàm số f được gọi là có cận sai số bậc q tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại $\delta > 0$ và $\tau > 0$ sao cho

$$\tau d(x, [f \le 0]) \le f_+^q(x),$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$.

Nếu $\delta = +\infty$, hay $B_\delta(\bar{x}) = X$, thì ta nói f có cận sai số toàn cục. Ngược lại ta nói f có cận sai số địa phương tại $\bar{x}$. Nếu $q = 1$, ta nói f có cận sai số tuyến tính. Nếu $q \neq 1$, ta nói f có cận sai số (Hölder) bậc q.

Định nghĩa 2.7

Cho X là không gian mêtric, Y là tập khác rỗng, $f: X\times Y \to \mathbb{R}_\infty$, $\bar{x} \in X$ thỏa $f(\bar{x},y) \le 0$ với mỗi $y \in Y$ và $q > 0$. Với mỗi $y \in Y$, ta định nghĩa

$$[f_y \le 0] := \{x \in X | f(x,y) \le 0\}.$$

Hàm số f được gọi là có cận sai số bậc q tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$\tau d\big(x, [f_y \le 0]\big) \le f_+^q(x,y),$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in Y$.

Nhận xét 2.4

(i) Khái niệm cận sai số trong Định nghĩa 2.7 trở thành khái niệm cận sai số trong Định nghĩa 2.6 khi $Y = \{\bar{y}\}$.

(ii) Trong trường hợp $q = 1$, khái niệm cận sai số trong Định nghĩa 2.7 trở về khái niệm được đề xuất bởi Jourani (2000).

3. ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO CẬN SAI SỐ HÖLDER CHỨA THAM SỐ

Trong xuyên suốt mục này, ta giả sử X là không gian mêtric, Y là tập khác rỗng và $f: X\times Y \to \mathbb{R}_\infty$.

Mệnh đề 3.1

Cho $(x,y) \in \mathrm{dom} f$ với $f(x,y) > 0$, $f(\cdot,y)$ là hàm nửa liên tục dưới tại x, $\tau > 0$ và $q > 0$. Nếu

$$qf^{q-1}(u,y)|\nabla_x f|(u,y) \ge \tau,$$

với mọi $u \in X$ thoả

$$f(u,y) \le f(x,y),\ d(u,x) < d\big(x, [f_y \le 0]\big),$$

thì

$$\tau d\big(x, [f_y \le 0]\big) \le f^q(x,y).$$

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $f^q(x,y) < \tau d\big(x, [f_y \le 0]\big)$. Chọn $\hat{\tau} \in (0,\tau)$ sao cho $f^q(x,y) < \hat{\tau} d(x, [f_y \le 0])$. Áp dụng Bổ đề 2.2 cho hàm nửa liên tục dưới $f_+^q(\cdot,y)$ tại x với $\varepsilon =$

$\hat{\tau}d\big(x,[f_y \le 0]\big)$ và $\lambda = d\big(x,[f_y \le 0]\big)$, ta suy ra tồn tại $\hat{u} \in X$ thoả:

(i) $f_+^q(\hat{u},y) \le f_+^q(x,y)$;

(ii) $d(\hat{u},x) < d\big(x,[f_y \le 0]\big)$;

(iii) $f_+^q(\hat{u},y) \le f_+^q(u,y) + \hat{\tau}d(\hat{u},u), \forall u \in X$.

Từ (ii) ta được $\hat{u} \notin [f_y \le 0]$ hay $f(\hat{u},y) > 0$. Kết hợp với (i) ta có $0 < f(\hat{u},y) \le f(x,y)$. Trong (iii), lấy infimum hai vế của bất đẳng thức trên tập $[f_y \le 0]$, ta được $f^q(\hat{u},y) \le \hat{\tau}d\big(\hat{u},[f_y \le 0]\big)$. Do đó

$$f^q(\hat{u},y) < \tau d\big(\hat{u},[f_y \le 0]\big).$$

Ta có $f_+^q(\cdot,y)$ là hàm nửa liên tục dưới (vì hàm hợp của hàm liên tục $\varphi(t) := t^q$ $(t \in \mathbb{R})$ và hàm nửa liên tục dưới $f_+(\cdot,y)$). Do đó $f_+^q(u,y) = f^q(u,y) > 0$ với mọi u gần $\hat{u}$. Bất đẳng thức trong (iii) được viết tương đương dưới dạng

$$\frac{f^q(\hat{u},y) - f^q(u,y)}{d(\hat{u},u)} \le \hat{\tau},$$

với mọi u gần $\hat{u}$ và $u \ne \hat{u}$, hay $|\nabla_x f^q|(\hat{u},y) \le \hat{\tau}$. Áp dụng Bổ đề 2.7, ta được

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)|\nabla_x f|(\hat{u},y) \le \hat{\tau} < \tau.$$

Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. Chứng minh được hoàn tất. ■

Định lý 3.1

Cho X là không gian mêtric đủ, $\bar{x} \in X$, $\tau > 0$, $\delta > 0$ và $q > 0$. Giả sử $f(\cdot,y)$ là hàm nửa liên tục dưới trên X và $f(\bar{x},y) \le 0$ với mỗi $y \in Y$. Nếu với mỗi $y \in Y$, ta có

$$qf^{q-1}(x,y)|\nabla_x f|(x,y) \ge \tau,$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ thì

$$\tau d\big(x,[f_y \le 0]\big) \le f_+^q(x,y),$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in Y$.

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in Y$ sao cho

$$f_+^q(x,y) < \tau d\big(x,[f_y \le 0]\big).$$

Khi đó $f(x,y) > 0$. Theo Mệnh đề 3.1, tồn tại $\hat{u} \in X$ thoả $d(\hat{u},x) < d\big(x,[f_y \le 0]\big) \le d(x,\bar{x})$ sao cho

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)|\nabla_x f|(\hat{u},y) < \tau.$$

Điều này trái với giả thiết vì $\hat{u} \in B_\delta(\bar{x})$. Thật vậy:

$$d(\hat{u},\bar{x}) \le d(\hat{u},x) + d(x,\bar{x}) \le 2d(x,\bar{x}) < \delta.$$

Chứng minh được hoàn tất. ■

Hệ quả 3.1

Cho X là không gian mêtric đủ, $\bar{x} \in X$, và $q > 0$. Giả sử $f(\cdot,y)$ là hàm nửa liên tục dưới trên X và $f(\bar{x},y) \le 0$ với mỗi $y \in Y$. Nếu

$$\inf_{y \in Y} \liminf_{x \to \bar{x}} qf^{q-1}(x,y)|\nabla_x f|(x,y) > 0,$$

thì f có cận sai số địa phương bậc q tại $\bar{x}$.

Mệnh đề 3.2

Cho X là không gian Asplund, $(x,y) \in \operatorname{dom} f$ với $f(x,y) > 0$, $f(\cdot,y)$ là một hàm nửa liên tục dưới trên X, $\tau > 0$ và $q > 0$. Nếu

$$qf^{q-1}(u,y)\|x^*\| \ge \tau,$$

với mọi $u \in X$ thoả $\| u - x \| < d\big(x,[f_y \le 0]\big)$ và $x^* \in \partial_x^F f(u,y)$ thì

$$\tau d\big(x,[f_y \le 0]\big) \le f^q(x,y).$$

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $f^q(x,y) < \tau d\big(x,[f_y \le 0]\big)$. Theo Mệnh đề 3.1, tồn tại $\hat{u} \in X$ thoả $\|\hat{u} - x\| < d\big(x,[f_y \le 0]\big)$ và

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)|\nabla_x f|(\hat{u},y) < \tau.$$

Chọn $\hat{\tau} \in (0,\tau)$ sao cho

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)|\nabla_x f|(\hat{u},y) \le \hat{\tau}.$$

Theo Định nghĩa 2.4 của độ dốc riêng phần, ta được:

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)f(\hat{u},y) \le qf^{q-1}(\hat{u},y)f(u,y) + \hat{\tau}\|u - \hat{u}\|$$

với mọi u gần $\hat{u}$. Bất đẳng thức trên tương đương với $h(\hat{u}) \le h(u)$ với mọi u gần $\hat{u}$, trong đó:

$$h(u) := qf^{q-1}(\hat{u},y)f(u,y) + \hat{\tau}\|u - \hat{u}\|, \forall u \in X.$$

Áp dụng Bổ đề 2.3, ta được:

$$0 \in \partial^F\big(qf^{q-1}(\hat{u},y)f(\cdot,y) + \hat{\tau}\|\cdot - \hat{u}\|\big)(\hat{u}).$$ Chọn $\varepsilon > 0$ thoả

$$\varepsilon < d\big(x,[f_y \le 0]\big) - d(\hat{u},x).$$

Theo Bổ đề 2.6, tồn tại $\hat{x}, \hat{x}' \in B_\varepsilon(\hat{u})$ và

$$x^* \in \partial^F f(\cdot,y)(\hat{x}), x'^* \in \hat{\tau}\,\partial^F \| \hat{u} - \cdot \| (\hat{x}')$$

thoả $|f(\hat{x},y)-f(\hat{u},y)|<\varepsilon$ và $\|x^*+x'^*\|<\varepsilon$. Theo Bổ đề 2.4, ta có $\|x'^*\|\le\hat{\tau}$. Ngoài ra,

$$\|\hat{x}-x\|\le\|\hat{x}-\hat{u}\|+\|\hat{u}-x\|$$

$$<\varepsilon+\|\hat{u}-x\|<d(x,[f_y\le 0]),$$

và

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)\|x^*\|<\hat{\tau}+\varepsilon<\tau.$$

Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết. Chứng minh được hoàn tất. ■

Định lý 3.2

Cho X là không gian Asplund, $\bar{x}\in X$, $\tau>0$, $\delta>0$ và $q>0$. Giả sử $f(\cdot,y)$ là hàm nửa liên tục dưới trên X và $f(\bar{x},y)\le 0$ với mỗi $y\in Y$. Nếu với mọi $y\in Y$, ta có

$$qf^{q-1}(x,y)\|x^*\|\ge\tau,$$

với mọi $x\in B_\delta(\bar{x})$ và $x^*\in\partial_x^F f(x,y)$ thì $\tau d\big(x,[f_y\le 0]\big)\le f_+^q(x,y)$,

với mọi $x\in B_{\delta/2}(\bar{x})$ *và* $y\in Y$.

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại $x\in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y\in Y$ sao cho:

$$f^q(x,y)<\tau d\big(x,[f_y\le 0]\big).$$

Theo Mệnh đề 3.2, tồn tại $\hat{u}\in X$ với $\|\hat{u}-x\|\le d(x,[f_y\le 0])\le\|x-\bar{x}\|$ và $x^*\in\partial_x^F f(\hat{u},y)$ sao cho

$$qf^{q-1}(\hat{u},y)\|x^*\|<\tau.$$

Điều này trái với giả thiết vì $\hat{u}\in B_\delta(\bar{x})$. Thật vậy:

$$\|\hat{u}-\bar{x}\|\le\|\hat{u}-x\|+\|x-\bar{x}\|$$

$$\le 2\|x-\bar{x}\|<\delta.$$

Chứng minh được hoàn tất. ■

Hệ quả 3.2

Cho X là không gian Asplund, $\bar{x}\in X$, và $q>0$. Giả sử $f(\cdot,y)$ là hàm nửa liên tục dưới trên X và $f(\bar{x},y)\le 0$ với mỗi $y\in Y$. Nếu

$$\inf_{y\in Y}\liminf_{x\to\bar{x},x^*\in\partial_x^F f(x,y)} qf^{q-1}(x,y)\|x^*\|>0,$$

thì hàm số f có cận sai số địa phương tại $\bar{x}$.

4. TÍNH CHÍNH QUY MÊTRIC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Trong mục này, ta giả sử X và Y là hai không gian mêtric, $F:X\rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị và $(\bar{x},\bar{y})\in\operatorname{gph}F$.

Định nghĩa 4.1 (Cuong & Kruger, 2021)

Ánh xạ đa trị F được gọi là có tính chính quy mêtric bậc $q>0$ tại $(\bar{x},\bar{y})$ nếu tồn tại $\tau>0$ và $\delta>0$ sao cho

$$\tau d(x,F^{-1}(y))\le d^q\big(y,F(x)\big),$$

với mọi $x\in B_\delta(\bar{x})$ và $y\in B_\delta(\bar{y})$.

Mệnh đề 4.1

Cho $y\in Y$ và $f(x,y):=d(y,F(x))$ với mọi $x\in X$. Khi đó $\big[f_y\le 0\big]=F^{-1}(y)$.

Chứng minh

Ta có:

$$\begin{aligned}\big[f_y\le 0\big]&=\{x\in X|f(x,y)\le 0\}\\&=\{x\in X|d(y,F(x))\le 0\}\\&=\big\{x\in X|d\big(y,F(x)\big)=0\big\}\\&=F^{-1}(y).\end{aligned}$$ ■

Hệ quả 4.1

Cho X là không gian mêtric đủ, $\tau>0$, $\delta>0$ và $q>0$. Giả sử $(\bar{x},y)\in\operatorname{gph}F$ và $d(y,F(\cdot))$ là hàm nửa liên tục dưới trên X với mỗi $y\in B_{\delta/2}(\bar{y})$. Nếu với mỗi $y\in B_{\delta/2}(\bar{y})$, ta có:

$$qd^{q-1}(y,F(x))|\nabla_x d(y,F(x)|(x,y)\ge\tau,$$

với mọi $x\in B_\delta(\bar{x})$ thì

$$\tau d(x,F^{-1}(y))\le d^q(y,F(x)),$$

với mọi $x\in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y\in B_{\delta/2}(\bar{y})$.

Chứng minh

Áp dụng Định lý 3.1 với $f(\cdot,y):=d(y,F(\cdot))$ và $Y:=B_{\delta/2}(\bar{y})$. ■

Hệ quả 4.2

Cho X là không gian Asplund, $\tau>0$, $\delta>0$ và $q>0$. Giả sử $(\bar{x},y)\in\operatorname{gph}F$ và $d(y,F(\cdot))$ là hàm nửa liên tục dưới trên X với mỗi $y\in B_{\delta/2}(\bar{y})$. Nếu với mỗi $y\in B_{\delta/2}(\bar{y})$, ta có:

$$qd^{q-1}(y,F(x))\|x^*\|\ge\tau,$$

với mọi $x\in B_\delta(\bar{x})$ và $x^*\in\partial_x^F d(y,F(x))$ thì

$$\tau d(x,F^{-1}(y))\le d^q(y,F(x)),$$

với mọi $x\in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y\in B_{\delta/2}(\bar{y})$.

Chứng minh

Áp dụng Định lý 3.2 với $f(\cdot, y) \coloneqq d(y, F(\cdot))$ và $Y := B_{\delta/2}(\bar{y})$. ■

5. KẾT LUẬN

Nội dung nghiên cứu của bài viết đã đưa ra được các kết quả về điều kiện đủ cho hàm số thực suy rộng có cận sai số Hölder trong không gian mêtric và Asplund. Các điều kiện này được phát biểu dưới dạng độ dốc và dưới vi phân Fréchet. Các kết quả về cận sai số Hölder có chứa tham số được áp dụng để thiết lập điều kiện đủ cho tính chính quy mêtric Hölder của ánh xạ đa trị. Kết quả trong bài báo có thể được phát triển theo các hướng dưới đây: (1) thiết lập các điều kiện cần trong không gian nền và không gian đối ngẫu cho cận sai số Hölder; (2) tổng quát hoá các kết quả sang trường hợp cận sai số phi tuyến có chứa tham số; (3) xây dựng và khảo sát mô hình cận sai số (Hölder và phi tuyến) chứa tham số cho hàm đơn trị vectơ và (4) áp dụng cận sai số chứa tham số vào việc đánh giá các tốc độ hội tụ của một số thuật toán dùng để giải các bài toán tối ưu với dữ liệu nhiễu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Azé, D., Corvellec, J. N., & Lucchetti, R. E. (2002). Variational pairs and applications to stability in nonsmooth analysis. *Nonlinear Analysis, 49(5, Series A: Theory Methods)*, 643–670. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00129-8

Cuong N. D., & Kruger, A. Y. (2021). Transversality properties: primal sufficient conditions. *Set-Valued and Variational Analysis, 29*(2), 221–256.https://doi.org/10.1007/s11228-020-00545-1

Cuong, N. D., & Kruger, A. Y. (2022). Error bounds revisited. *Optimization, 71*(4), 1021–1053. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2032695

De Giorgi, E., Marino, A., & Tosques, M. (1980). Evolution problems in metric spaces and steepest descent curves. *Atti della Accademia Nazionale Lincei Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali Rendiconti Lincei*, *68*(3), 180–187.

Dao, M. N., & Phan, H. M. (2019). Linear convergence of projection algorithms. *Mathematics of Operations Research*, *44*(2), 715–738. https://doi.org/10.1287/moor.2018.0942

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *47*, 324–353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Fabian, M. (1989). Subdifferentiability and trustworthiness in the light of a new variational principle of Borwein and Preiss. *Acta Universitatis Carolinae*, *30*, 51–56.

Hoffman, A. J. (1952). On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Research of the National Bureau of Standards 49*, 263–265. https://doi.org/10.6028/jres.049.027

Ioffe, A. D. (1979). Regular points of Lipschitz functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, *251*, 61–69. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1979-0531969-6

Jourani, A. (2000). Hoffman's error bound, local controllability, and sensitivity analysis. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *38*(3), 947–970. https://doi.org/10.1137/S0363012998339216

Kruger, A. Y. (2003). On Fréchet subdifferentials. *Journal of Mathematical Sciences*, *116*(3), 3325–3358. https://doi.org/10.1023/A:1023673105317

Lucchetti, R. (2006). *Convexity and well-posed problems*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 22, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/0-387-31082-7

Mordukhovich, B. S., & Nam, N. M. (2014). *An easy path to convex analysis and applications*. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics, 14, Morgan and Claypool Publishers, Williston, VT. https://doi.org/10.1007/978-3-031-02406-1

Pang, J. S. (1997). Error bounds in mathematical programming. *Math Programming Series B, 79*(1–3), 299–332. https://doi.org/10.1007/BF02614322

Phelps, R. R. (1993). *Convex functions, monotone operators and differentiability*. Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin.