Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.147

TÍNH LIÊN TỤC HAUSDORFF CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR PHỤ THUỘC THAM SỐ THÔNG QUA TẬP CẢI TIẾN

Lâm Quốc Anh[1], Phạm Thanh Dược[2], Võ Thị Mộng Thúy[3*] và Đặng Thị Mỹ Vân[4]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghệ Cần Thơ*

[3]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*

[4]*Khoa Đào tạo Giáo viên, Trường Cao đẳng Cần Thơ*

[*]*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Võ Thị Mộng Thúy (email: vtmthuy@tdu.edu.vn)*

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 13/02/2022
Ngày nhận bài sửa: 19/04/2022
Ngày duyệt đăng: 25/04/2022

Title:

The Hausdorff continuity of weakly efficient solution mappings to parametric vector optimization problems via improvement sets

Từ khóa:

Bài toán tối ưu vector, nghiệm hữu hiệu yếu, tập cải tiến, tính liên tục Hausdorff

Keywords:

Hausdorff continuity, improvement set, vector optimization problem, weakly efficient solution

ABSTRACT

This paper focuses on studying parametric vector optimization problems via improvement sets and investigating the Hausdorff continuity of weakly efficient solution mappings of these problems. Firstly, properties of improvement sets are discussed. Then, models of parametric vector optimization problems via improvement sets and their weakly efficient solutions are introduced. Finally, by using the properties of improvement sets and convexity conditions of a vector-valued mapping, sufficient conditions for the Hausdorff continuity of these weak efficient solution mappings are investigated.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, mô hình bài toán tối ưu vector phụ thuộc tham số được tập trung nghiên cứu thông qua tập cải tiến và khảo sát tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu cho các bài toán này. Trước tiên, một số tính chất của tập cải tiến được xây dựng. Sau đó, mô hình bài toán tối ưu vector thông qua tập cải tiến và nghiệm hữu hiệu yếu của chúng được đề xuất. Cuối cùng, bằng cách sử dụng các tính chất của tập cải tiến và tính lồi của hàm có giá trị vector, các điều kiện đủ cho tính liên tục Hausdorff của các ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu này được khảo sát.

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết tối ưu là một nhánh quan trọng của toán học, đang phát triển mạnh, và ngày càng có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, công nghệ và quản lý hiện đại (Kuroiwa, 2003; Hernández et al., 2010; Jahn & Ha, 2011). Khi áp dụng vào những trường hợp thực tế, ngay từ đầu đã nhận thấy rằng, các mô hình trong thực tế đều được xét ở dạng vector, tức là các điều kiện ràng buộc và hàm mục tiêu được cho trong không gian nhiều chiều (Kuroiwa, 2003; Luc, 2005; Sach, 2005; Flores-Bazán & Jiménez, 2009; Maeda, 2012; Zhao et al., 2013; Zhao & Yang, 2014; Zhao & Yang, 2015; Chicco &Rossi, 2015; Dhingra & Lalitha, 2017). Do đó, các mô hình tối ưu vector đã và đang là chủ đề được nhiều nhà toán học quan tâm. Các mô hình tối ưu vector thường có nhiều phương pháp tiếp cận khác nhau, trong đó cách tiếp cận bằng *tập cải tiến* được xem là một trong những hướng nghiên cứu rất hiệu quả và đáp ứng tốt cho nhiều dạng nghiệm hữu hiệu khác nhau của các mô hình trong tối ưu vector (Luc, 2005; Qiu & Yang, 2010; Eichfelder & Ha, 2013; Chicco & Rossi, 2015; Dhingra & Lalitha, 2017).

Trong những năm gần đây, khi nghiên cứu các vấn đề trong kinh tế, các nhà toán học đã đề xuất và khảo sát nhiều tính chất quan trọng của *tập cải tiến* (Chicco et al., 2011; Chicco & Rossi, 2015; Lalitha & Chatterjee, 2015). Các kết quả này, ngay sau đó đã được các nhà toán học áp dụng vào việc nghiên cứu các tính chất định tính của nghiệm cho các mô hình tối ưu, ví dụ như, sự tồn tại nghiệm của bài toán tối ưu đa mục tiêu (Chicco & Rossi, 2015), điều kiện ổn định và sự hội tụ nghiệm của bài toán tối ưu tập (Dhingra & Lalitha, 2017; Mao et al., 2019), tính ổn định nghiệm bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số (Wei et al., 2020). Gần đây, các tính chất này cũng đã được khai thác và sử dụng trong việc nghiên cứu tính liên thông của tập nghiệm bài toán cân bằng vector (Liang et al., 2020). Đây là hướng tiếp cận rất hiệu quả, tuy nhiên đến nay, các kết quả đạt được còn ít và chỉ mang tính khởi đầu với nhiều sự gợi mở.

Tính liên tục Hausdorff cũng là chủ đề được rất nhiều nhà Toán học quan tâm để khảo sát các tính chất của ánh xạ nghiệm bài toán tối ưu, bài toán cân bằng vector (Anh & Khanh, 2007; Anh et al., 2020). Trên cơ sở đó, trong bài báo này,mô hình bài toán tối ưu vector phụ thuộc tham số được thiết lập thông qua tập cải tiến, khảo sát tính liên tục Hausdorff cho ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán này.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ và $\mathbb{P}$ là các không gian định chuẩn, $\mathcal{K}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Giả sử $\mathbb{Y}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathbb{Y}$ và $\mathcal{C}$ là nón lồi đóng có đỉnh trong $\mathbb{Y}$ với phần trong khác rỗng ($\text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$). Ký hiệu nón cực dương $\mathcal{C}^*$của $\mathcal{C}$ là

$$\mathcal{C}^* := \{\ell \in \mathbb{Y}^* : \ell(y) \geq 0, \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Cho $\mathbb{R}_+$ tập hợp các số thực không âm và $\mathcal{A}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$, ký hiệu bao đóng của $\mathcal{A}$ là $\text{cl}\mathcal{A}$. Nón sinh ra bởi $\mathcal{A}$ ký hiệu là

$$\text{cone}\mathcal{A} := \{ta : t \geq 0, a \in \mathcal{A}\}.$$

Ta nói $\mathcal{A}$ là đặc nếu $\text{int}\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Bổ đề 2.1. (Jahn, 2009, Bổ đề 3.21, tr. 77) Nếu $\mathbb{Y}$ là một không gian tô pô tuyến tính thực và $\mathcal{C}$ là nón lồi thỏa $\text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì

$$\text{int}\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{Y} : \ell(y) > 0, \forall \ell \in \mathcal{C}^* \backslash \{0\}\}.$$

Bổ đề 2.2. (Jahn, 2009, Định lý 3.16, tr. 74) Cho $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai tập con lồi khác rỗng của không gian tô pô tuyến tính thực $\mathbb{Y}$ với $\text{int}\,\mathcal{A} \neq \emptyset$. Khi đó, $\mathcal{B} \cap \text{int}\mathcal{A} = \emptyset$ nếu và chỉ nếu có một hàm tuyến tính $l \in \mathbb{Y}^* \backslash \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ và số thực α thỏa $l(a) \leq \alpha \leq l(b)$ với mọi $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$, và

$$l(a) < \alpha, \forall a \in \text{int}\mathcal{A}.$$

Định nghĩa 2.1. (Göpfert et al., 2003, Định nghĩa 2.5.1, tr. 51) Một ánh xạ đa trị $Q: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *nửa liên tục trên* (usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận bất kỳ $\mathcal{U}$ của $Q(x_0)$ thì tồn tại một lân cận $\mathcal{N}$ của x_0 sao cho $Q(\mathcal{N}) \subset \mathcal{U}$;

(b) *nửa liên tục dưới* (lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với bất kỳ tập con mở $\mathcal{U}$ của $\mathbb{Y}$ thỏa $Q(x_0) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận $\mathcal{N}$ của x_0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{N}$ thì

$$Q(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset;$$

(c) *liên tục* tại x_0 nếu hàm usc và lsc tại x_0.

Bổ đề 2.3. (Hu & Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.6, tr. 37)

(a) Q là lsc tại x_0 nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ và $y_0 \in Q(x_0)$, tồn tại $y_n \in Q(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$.

(b) Q là lsc tại x_0 nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ thì $Q(x_0) \subset \text{liminf}Q(x_n)$ trong đó

$$\text{liminf}Q(x_n) := \{y_0 \in Y : \exists y_n \in Q(x_n), y_n \to y_0\}.$$

Bổ đề 2.4. (Hu & Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.19, tr. 41) Nếu $Q(x_0)$ là tập compact, khi đó Q là usc tại x_0 nếu và chỉ nếu với dãy bất kỳ $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và $y_n \in Q(x_n)$, tồn tại dãy $\{y_{n_k}\}$ hội tụ về $y_0 \in Q(x_0)$.

Định nghĩa 2.2. (Anh et al., 2017) Một ánh xạ đa trị $Q: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *nửa liên tục trên theo Hausdorff* (viết tắt là *H*-usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{B}$ của 0 trong $\mathbb{Y}$ thì tồn tại một lân cận $\mathcal{N}$ của x_0 sao cho

$$Q(x) \subset Q(x_0) + \mathcal{B}, \qquad \forall x \in \mathcal{N};$$

(b) *nửa liên tục dưới theo Hausdorff* (viết tắt là *H*-lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mỗi lân cận $\mathcal{B}$ của 0 trong $\mathbb{Y}$ thì tồn tại một lân cận $\mathcal{N}$ của x_0 sao cho

$$Q(x_0) \subset Q(x) + \mathcal{B}, \qquad \forall x \in \mathcal{N};$$

(c) *liên tục Hausdorff* tại x_0 nếu hàm Q là *H*-usc và *H*-lsc tại x_0.

Bổ đề 2.5. (Hu & Papageorgiou, 1997, Định lý 2.68, tr. 62)

(a) Nếu Q là usc tại $x_0 \in \mathbb{X}$ thì Q là H-usc tại x_0. Ngược lại, nếu Q là H-usc tại x_0 và $Q(x_0)$ là tập compact thì Q usc tại x_0.

(b) Nếu Q là H-lsc tại x_0 thì Q là lsc tại x_0. Ngược lại, nếu Q lsc tại x_0 và $Q(x_0)$ là tập compact thì Q là H-lsc tại x_0.

Bổ đề 2.6. (Berge, 1963, Định lý 2, tr. 114) Hợp $F = \bigcup_{i\in I} F_i$ của một họ các ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới F_i từ $\mathbb{X}$ đến $\mathbb{Y}$ cũng là một ánh xạ đa trị nửa liên tục dưới từ $\mathbb{X}$ đến $\mathbb{Y}$, với I là tập chỉ số.

Định nghĩa 2.3. (Gutiérrez et al., 2012) $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset \mathbb{Y}$ được gọi là *tập cải tiến* ứng với (wrt) $\mathcal{C}$ nếu $0_{\mathbb{Y}} \notin \mathcal{E}$ and $\mathcal{E} + \mathcal{C} = \mathcal{E}$. Họ các tập cải tiến wrt $\mathcal{C}$ trong $\mathbb{Y}$ ký hiệu là $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$.

Nếu $\mathcal{C}$ là nón có phần trong khác rỗng ($\text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$) thì $\text{int}\mathcal{C}$ là một trong những tập cải tiến được quan tâm. Hơn nữa, $\mathcal{C}\backslash\{0\} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$, và $\mathbb{Y}\backslash(-\mathcal{C}) \in \mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$.

Trong bài báo này, xét $\mathcal{E} \subset \text{int}\mathcal{C}$ sao cho $\inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) > 0, \forall \ell \in \mathrm{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$.

Định nghĩa 2.4.(Fu & Wang, 2003) Cho $\mathcal{K}$ là tập con không rỗng của $\mathbb{X}$ và $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$.

(a) Ánh xạ liên tục $\mathcal{X}_{x_1,x_2}: [0,1] \to \mathbb{X}$ thỏa mãn các điều kiện $\mathcal{X}_{x_1,x_2}(0) = x_1$ và $\mathcal{X}_{x_1,x_2}(1) = x_2$ sẽ được gọi là một *cung* trên $\mathcal{K}$ tương ứng với các điểm x_1, x_2.

(b) $\mathcal{K}$ được gọi là *liên thông cung* nếu với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$, tồn tại một cung $\mathcal{X}_{x_1,x_2}$ trên $\mathcal{K}$.

Định nghĩa 2.5.(Fu & Wang, 2003) Cho $\mathcal{K}$ là tập con không rỗng của $\mathbb{X}$. Một ánh xạ có giá trị vector $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là *$\mathcal{C}$-lồi theo cung* trên $\mathcal{K}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 \neq x_2$, tồn tại một cung $\mathcal{X}_{x_1,x_2}$ trên $\mathcal{K}$ sao cho với mọi $t \in [0,1]$,

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \in f(\mathcal{X}_{x_1,x_2}(t)) + \mathcal{C}.$$

Định nghĩa 2.6.(Liang et al., 2020) Cho $\emptyset \neq \mathcal{K} \subset \mathbb{X}$. Ánh xạ có giá trị vector $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ được gọi là *$\mathcal{E}$-gần giống lồi* trên $\mathcal{K}$ nếu $\text{cl}(f(\mathcal{K}) + \mathcal{E})$ là tập lồi trong $\mathbb{Y}$.

3. BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR THÔNG QUA TẬP CẢI TIẾN

Phần này thảo luận về tính liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vector phụ thuộc tham số thông qua tập cải tiến $\mathcal{E}$:

$$(\text{VOP})_{\mathcal{E}} \min f(x,p) \text{ với } (x,p) \in \mathcal{K} \times \mathcal{P},$$

trong đó $f: \mathcal{K} \times \mathcal{P} \to \mathbb{Y}$ là ánh xạ có giá trị vector và $\mathcal{K}, \mathcal{P}$ là các tập con không rỗng của $\mathbb{X}$ và $\mathbb{P}$.

Định nghĩa 3.1. Với mỗi $p \in \mathcal{P}$, phần tử $x_0 \in \mathcal{K}$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu yếu* của $(\text{VOP})_{\mathcal{E}}$, ký hiệu $x_0 \in \text{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p)$ nếu với mọi $x \in \mathcal{K}$, ta có

$$f(x,p) - f(x_0,p) \notin -\text{int}\mathcal{E}.$$

Bổ đề 3.1. Với mỗi $p \in \mathcal{P}$ và $\mathcal{E} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ là tập lồi đặc. Khi đó, nếu $f(\cdot,p)$ là *$\mathcal{E}$-gần giống lồi* trên $\mathcal{K}$ thì

$$\text{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p) = \cup_{\ell\in\mathcal{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}} W_\ell(p),$$

với $W_\ell(p) = \{z \in \mathcal{K}: \forall x \in \mathcal{K}, \ell(f(x,p)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell(f(z,p))\}$.

Chứng minh

(Điều kiện cần) Cho $\bar{x} \in \text{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p)$ thì với mọi $x \in \mathcal{K}$ ta có

$$f(x,p) - f(\bar{x},p) \notin -\text{int}\mathcal{E},$$

suy ra $(f(\mathcal{K},p) - f(\bar{x},p)) \cap (-\text{int}\mathcal{E}) = \emptyset$.

Khi đó,

$$\text{cl}(f(\mathcal{K},p) - f(\bar{x},p) + \mathcal{E}) \cap (-\text{int}\mathcal{C}) = \emptyset.$$

Vì f là $\mathcal{E}$-gần *giống lồi* nên

$$\text{cl}(f(\mathcal{K},p) - f(\bar{x},p) + \mathcal{E})$$

là tập lồi. Áp dụng Bổ đề 2.2., tồn tại $\bar{\ell} \in \mathbb{Y}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\bar{\ell}(f(x,p)) - \bar{\ell}(f(\bar{x},p)) + \bar{\ell}(e) \geq \alpha \geq -\bar{\ell}(c),$$

với mọi $x \in \mathcal{K}, \mathrm{c} \in \mathcal{C}, e \in \mathcal{E}$. Lấy $x = \bar{x}$, ta có

$$\bar{\ell}(e) \geq -\bar{\ell}(c), \forall \mathrm{c} \in \mathcal{C}, e \in \mathcal{E}.$$

Vì $\mathcal{C}$ là nón nên $\bar{\ell}(c) \geq 0$, với mọi $\mathrm{c} \in \mathcal{C}$. Điều này kéo theo $\bar{\ell} \in \mathcal{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$. Mặt khác, cho $\mathrm{c} = 0$, thì với mỗi phần tử e trong $\mathcal{E}$, ta thu được $\bar{\ell}(e) \geq \bar{\ell}(f(\bar{x},p)) - \bar{\ell}(f(x,p))$, với mọi $x \in \mathcal{K}$. Hay,

$$\inf_{e\in\mathcal{E}} \bar{\ell}(e) + \bar{\ell}(f(x,p)) \geq \bar{\ell}(f(\bar{x},p))$$

với mọi $x \in \mathcal{K}$ nên $\bar{x} \in W_\ell(p)$.

(Điều kiện đủ) Lấy $\bar{x} \in \cup_{\ell\in\mathcal{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}} W_\ell(p)$ thì tồn tại $\hat{\ell} \in \mathcal{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ sao cho

$$\hat{\ell}(f(x,p)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \hat{\ell}(e) \geq \hat{\ell}(f(\bar{x},p)), \forall x \in \mathcal{K}. \quad (3.1)$$

Giả sử $\bar{x} \notin \mathrm{WEff}(\mathcal{E}, \mathcal{K}, f)(p)$ thì tồn tại $\hat{x} \in \mathcal{K}$ sao cho $f(\hat{x}, p) - f(\bar{x}, p) \in -\mathrm{int}\mathcal{E}$, tức là

$$f(\bar{x}, p) - f(\hat{x}, p) \in \mathrm{int}\mathcal{E} = \mathcal{E} + \mathrm{int}\mathcal{C}.$$

Do đó, tồn tại $\hat{e} \in \mathcal{E}, \hat{c} \in \mathrm{int}\mathcal{C}$ sao cho

$$f(\bar{x}, p) - f(\hat{x}, p) = \hat{e} + \hat{c}.$$

Suy ra

$$\hat{\ell}(f(\bar{x}, p)) - \hat{\ell}(f(\hat{x}, p)) = \hat{\ell}(\hat{e}) + \hat{\ell}(\hat{c}).$$

Vì $\hat{\ell}(\hat{c}) > 0$ nên

$$\hat{\ell}(\hat{e}) < \hat{\ell}(f(\bar{x}, p)) - \hat{\ell}(f(\hat{x}, p)).$$

Mặt khác,

$$\inf_{e\in\mathcal{E}} \hat{\ell}(\mathrm{e}) \leq \hat{\ell}(\hat{e}) < \hat{\ell}(f(\bar{x}, p)) - \hat{\ell}(f(\hat{x}, p)),$$

tương đương với

$$\hat{\ell}(f(\hat{x}, p)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \hat{\ell}(\mathrm{e}) < \hat{\ell}(f(\bar{x}, p)),$$

điều này mâu thuẫn với (3.1).

Vì vậy $\bar{x} \in \mathrm{WEff}(\mathcal{E}, \mathcal{K}, f)(p)$. ■

Định lý 3.1. Cho $p_0 \in \mathcal{P}, \ell \in \mathcal{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$. Xét bài toán $(\mathrm{VOP})_{\mathcal{E}}(p)$, giả sử

(i) $\mathcal{K}$ là tập compact;

(ii) f liên tục trên $\mathcal{K} \times \{p_0\}$;

(iii) với mỗi $p \in \mathcal{P}, f(\cdot, p)$ là $\mathcal{C}$-*lồi theo cung* trên $\mathcal{K}$.

Khi đó, W_ℓ liên tục Hausdorff tại p_0.

Chứng minh.

Chứng minh được chia thành ba bước.

Bước 1. Ta chứng minh rằng W_ℓ usc tại p_0. Giả sử ngược lại W_ℓ không usc tại p_0, tức là tồn tại tập mở $\mathcal{U}$ sao cho $W_\ell(p_0) \subset \mathcal{U}$ và dãy p_n hội tụ về p_0 thì với mỗi n ta có thể tìm được $x_n \in W_\ell(p_n)\backslash\mathcal{U}$. Từ $x_n \in \mathcal{K}$ và tính compact của $\mathcal{K}$ cho phép ta giả sử rằng $x_n \to x_0 \in \mathcal{K}$.

Ta chứng minh $x_0 \in W_\ell(p_0)$. Nếu $x_0 \notin W_\ell(p_0)$ thì tồn tại $z_0 \in \mathcal{K}$ sao cho

$$\ell(f(z_0, p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) < \ell(f(x_0, p_0)). \quad (3.2)$$

Mặc khác $x_n \in W_\ell(p_n)$ ta được

$$\ell(f(z_0, p_n)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell(f(x_n, p_n)).$$

Kết hợp với tính liên tục của ℓ và f cho ta

$$\ell(f(z_0, p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell(f(x_0, p_0)).$$

Điều này mâu thuẫn với (3.2). Vì vậy $x_0 \in W_\ell(p_0)$, mâu thuẫn vì $x_n \notin \mathcal{U}$.

Bước 2. Để chứng minh W_ℓ là H-lsc tại p_0, ta chứng minh W_ℓ lsc tại p_0 và $W_\ell(p_0)$ là tập compact. Đặt

$$\widehat{W}_\ell(p) = \{z \in \mathcal{K} : \forall x \in \mathcal{K}, \ell(f(x, p)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) > \ell(f(z, p))\}.$$

Giả sử $\widehat{W}_\ell$ không lsc tại p_0 thì tồn tại $x_0 \in \widehat{W}_\ell(p_0)$ và dãy $p_n \to p_0$ sao cho với mọi $x_n \in \widehat{W}_\ell(p_n), x_n \nrightarrow x_0$. Khi đó, có một dãy $\{\bar{x}_m\} \to \mathrm{x}_0$ sao cho $\bar{x}_m \notin \widehat{W}_\ell(p_m)$ với mọi m, tức là với mỗi m luôn tồn tại $z_m \in \mathcal{K}$,

$$\ell(f(z_m, p_m)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \leq \ell(f(\bar{x}_m, p_m)),$$

Vì $\mathcal{K}$ là tập compact nên $z_m \to z_0 \in \mathcal{K}$. Từ tính liên tục của ℓ và f cho ta

$$\ell(f(z_0, p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \leq \ell(f(x_0, p_0)),$$

điều này mâu thuẫn vì $x_0 \in \widehat{W}_\ell(p_0)$. Do đó $\widehat{W}_\ell$ lsc tại p_0. Tiếp theo, lấy bất kỳ phần tử $\bar{x} \in W_\ell(p_0)$ và $x_1 \in \widehat{W}_\ell(p_0)$, vì $f(\cdot, p_0)$ là $\mathcal{C}$-*lồi theo cung* trên $\mathcal{K}$ nên tồn tại một cung $\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}$ trên $\mathcal{K}$ sao cho với mọi $t \in [0,1]$,

$$(1-t)f(\bar{x}, p_0) + tf(x_1, p_0) \in f(\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}(t), p_0) + \mathcal{C}.$$

Từ đó tồn tại $c \in \mathcal{C}$ để

$$f\left(\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}(t), p_0\right) = (1-t)f(\bar{x}, p_0) + tf(x_1, p_0) - c.$$

Do $\ell \in \mathcal{C}^*\backslash\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ nên $\ell(\mathrm{c}) \geq 0$, điều này kết hợp với $\bar{x} \in W_\ell(p_0)$ và $x_1 \in \widehat{W}_\ell(p_0)$, khi đó với mọi phần tử $x \in \mathcal{K}$ ta được

$$\begin{aligned}\ell(f\left(\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}(t), p_0\right) &\leq (1-t)\ell\left(f(\bar{x}, p_0)\right) \\ &\quad + t\ell(f(x_1, p_0)) \\ &< (1-t)\left[\ell\left(f(x, p_0)\right) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e)\right] \\ &\quad + t[\ell(f(x, p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e)] \\ &< \ell(f(x, p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e).\end{aligned}$$

Khi $t \to 0$, ta được $\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}(t) \to \bar{x}$ và với mọi phần tử $x \in \mathcal{K}$,

$$\ell(f(\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}(t), p_0)) < \ell(f(x, p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e).$$

Nghĩa là $\mathcal{X}_{\bar{x},x_1}(t) \in \widehat{W}_\ell(p_0)$ suy ra $\bar{x} \in \mathrm{cl}\widehat{W}_\ell(p_0)$. Do đó

$$W_\ell(p_0) \subset \mathrm{cl}\widehat{W}_\ell(p_0).$$

Nhờ tính nửa liên tục dưới của $\widehat{W}_\ell$ tại p_0 ta được

$$W_\ell(p_0) \subset \mathrm{cl}\widehat{W}_\ell(p_0) \subset \liminf \widehat{W}_\ell(p_n)$$

$$\subset \liminf W_\ell(p_n),$$

tức là W_ℓ lsc tại p_0. Lấy $x_n \in W_\ell(p_0)$ thỏa mãn $x_n \to x_0$. Vì $x_n \in \mathcal{K}$ và $\mathcal{K}$ là tập compact nên $x_0 \in \mathcal{K}$. Hơn nữa, $x_n \in W_\ell(p_0)$ nên với mọi $z \in \mathcal{K}$ cho ta

$$\ell(f(z,p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell(f(x_n,p_0)).$$

Do f và ℓ liên tục nên

$$\ell(f(z,p_0)) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell(f(x_0,p_0)), \forall z \in \mathcal{K},$$

nghĩa là $x_0 \in W_\ell(p_0)$. Từ đó suy ra $W_\ell(p_0)$ đóng trong $\mathcal{K}$ vì vậy $W_\ell(p_0)$ là tập compact.

Bước 3. Từ kết quả của Bước 1 và Bước 2, ta suy ra được W_ℓ liên tục Hausdorff tại p_0. ■

Định lý 3.2. Cho $p_0 \in \mathcal{P}, \mathcal{E}$ là tập con lồi đặc của $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$. Giả sử rằng

(i) $\mathcal{K}$ là tập compact;

(ii) f liên tục trên $\mathcal{K} \times \{p_0\}$;

(iii) với mỗi $p \in \mathcal{P}, f(\cdot,p)$ là $\mathcal{C}$-*lồi theo cung* và $\mathcal{E}$-*gần giống lồi* trên $\mathcal{K}$.

Khi đó $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ liên tục Hausdorff tại p_0.

Chứng minh.

Trước tiên, ta chứng minh $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ nửa liên tục dưới Hausdorff tại p_0. Bổ đề 3.1 cho ta

$$\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p) = \cup_{\ell\in\mathcal{C}^*\setminus\{0_{\mathbb{Y}^*}\}} W_\ell(p).$$

Theo Định lý 3.1, với mỗi $\ell \in \mathcal{C}^*\setminus\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$, W_ℓ nửa liên tục dưới tại p_0. Từ Bổ đề 2.6 suy ra $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ lsc tại p_0.

Tiếp theo, chứng minh $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_0)$ là tập compact. Lấy bất kì phần tử $x_n \in \mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_0)$ thỏa mãn $x_n \to \bar{x}$. Khi đó, với mọi $z \in \mathcal{K}$, ta có

$$f(z,p_0) - f(x_n,p_0) \notin -\mathrm{int}\mathcal{E}.$$

Vì f liên tục và $\mathbb{Y}\setminus(-\mathrm{int}\mathcal{E})$ là tập đóng nên

$$f(z,p_0) - f(\bar{x},p_0) \notin -\mathrm{int}\mathcal{E},$$

nghĩa là $\bar{x} \in \mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_0)$. Do đó, $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_0)$ là tập con đóng của tập compact $\mathcal{K}$ nên nó là tập compact. Vì vậy, $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ là H-lsc tại p_0.

Cuối cùng, ta chứng minh $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ là H-usc tại p_0 bằng cách chứng minh $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ usc tại p_0. Giả sử ngược lại rằng $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)$ không usc tại p_0, khi đó có một lân cận $\mathcal{U}_0$ của $\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_0)$ và dãy $\{p_n\} \to \{p_0\}$ sao cho với mỗi n, tồn tại $x_n \in \mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_n)$ thỏa $x_n \notin \mathcal{U}_0$. Vì $\mathcal{K}$ là tập compact nên $x_n \to x_0 \in \mathcal{K}$. Vì $x_n \in \mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_n)$ nên áp dụng Bổ đề 3.1, ta tìm được $\ell \in \mathcal{C}^*\setminus\{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ sao cho

$$x_{\mathrm{n}} \in W_\ell(p_n).$$

Khi đó, với mọi $x \in \mathcal{K}$,

$$\ell\big(f(x,p_n)\big) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell\big(f(x_n,p_n)\big)$$

Khi f liên tục, ta được

$$\ell\big(f(x,p_0)\big) + \inf_{e\in\mathcal{E}} \ell(e) \geq \ell\big(f(x_0,p_0)\big).$$

Tức là, $x_0 \in \mathrm{W}_\ell(p_0) \subset \mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f)(p_0) \subset \mathcal{U}_0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_n \notin \mathcal{U}_0$ với mọi n. ■

Nhận xét 3.1. Gần đây, Mao et al.(2019) đã sử dụng điều kiện lồi của tập ràng buộc và điều kiện tựa lồi chặt của hàm mục tiêu và đã nghiên cứu thành công các tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới Hausdorff của tập nghiệm bài toán tối ưu tập thông qua tập cải tiến với hai mối quan hệ thứ tự tập trên và dưới (Định lý 4.2 và Định lý 4.3). Trong bài báo này, phương pháp vô hướng hóa tuyến tính được sử dụng dựa trên bài toán bổ trợ đã được đề xuất trong Anh et al.(2017). Với hướng tiếp cận này, điều kiện lồi của tập ràng buộc và điều kiện tựa lồi chặt của hàm mục tiêu đã được giảm. Do đó, mặc dù mô hình được khảo sát trong bài báo này là một trường hợp đặc biệt của Mao et al.(2019) nhưng cách tiếp cận và kết quả là hoàn toàn khác với kết quả của bài báo vừa nêu.

Cuối cùng, một ví dụ được đưa ra để minh họa cho khả năng áp dụng của kết quả đạt được ở trên.

Ví dụ 3.1 Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{C} = \mathbb{R}^2_+$;

$$\mathcal{E} = (1,1) + \mathbb{R}^2_+;$$

$$\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}$$

Lấy $\mathbb{P} = \mathbb{R}; \mathcal{P} = [0,1]$ và $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được xác định bởi, với mọi $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(u,p) = f(x,y,p) = e^p(x^2,y^2).$$

* $f(.,p)$ là $\mathcal{C}$-*lồi theo cung*

Thật vậy, với mỗi cặp vector $u = (x,y)$ và $\bar{u} = (\bar{x},\bar{y})$ trong $\mathcal{K}$, ta xét cung

$$\mathcal{A}_{u,\bar{u}}(t) = \begin{cases} (1-2t)u, 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (2t-1)\bar{u}, \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Rõ ràng $\mathcal{A}_{u,\bar{u}}(t)$ là một *cung*. Ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $t \in [0,1]$ thì

$$(1-t)f(u,p) + tf(\bar{u},p) \in f(\mathcal{A}_{u,\bar{u}}(t),p) + \mathbb{R}^2_+.$$

Xét 2 trường hợp

* Trường hợp 1: nếu $0 \le t \le \frac{1}{2}$ thì

$$\begin{aligned} &f(\mathcal{A}_{u,\bar{u}}(t),p) = e^p((1-2t)^2x^2,(1-2t)^2y^2) \\ &\in e^p((1-2t)x^2,(1-2t)y^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (1-2t)e^p(x^2, y^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (1-t)e^p(x^2, y^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (1-t)e^p(x^2, y^2) + te^p(\bar{x}^2,\bar{y}^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (1-t)f(u,p) + tf(\bar{u},p) - \mathbb{R}^2_+. \end{aligned}$$

* Trường hợp 2: nếu $\frac{1}{2} \le t \le 1$, ta cũng có

$$\begin{aligned} &f(\mathcal{A}_{u,\bar{u}}(t),p) \in e^p((2t-1)\bar{x}^2,(2t-1)\bar{y}^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (2t-1)e^p(\bar{x}^2,\bar{y}^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (t+t-1)e^p(\bar{x}^2,\bar{y}^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in te^p(\bar{x}^2,\bar{y}^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (1-t)e^p(x^2,y^2) + te^p(\bar{x}^2,\bar{y}^2) - \mathbb{R}^2_+ \\ &\in (1-t)f(u,p) + tf(\bar{u},p) - \mathbb{R}^2_+. \end{aligned}$$

* Dễ thấy $\mathcal{K}$ là tập compact; f liên tục trên $\mathcal{K} \times \{p_0\}$ và $f(\cdot,p)$ là *$\mathcal{E}$-gần giống lồi* trên $\mathcal{K}$ thỏa các điều kiện của Định lý 3.2.

Do đó,

$$\mathrm{WEff}(\mathcal{E},\mathcal{K},f) = \left[-\sqrt{\frac{1}{e^p}},\sqrt{\frac{1}{e^p}}\right] \times \left[-\sqrt{\frac{1}{e^p}},\sqrt{\frac{1}{e^p}}\right] \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 1\}$$

liên tục Hausdorff tại p_0.

Với $(x,y) = (0,1), (\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ và $t = \frac{1}{2}$, khi đó với mọi $\lambda \in [0,1]$, ta dễ dàng kiểm tra thấy rằng

$$\lambda f(x,y) + (1-\lambda)f(\bar{x},\bar{y}) \ngeq f\left(\frac{1}{2}(0,1) + \frac{1}{2}(0,0)\right),$$

tức là $\lambda f(0,1) \ngeq f\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Do đó hàm f không thỏa mãn điều kiện tựa lồi chặt như được yêu cầu trong Định lý 4.2 và 4.3 trong Mao et al.(2019) và vì vậy các kết quả đó không thể áp dụng được cho trường hợp của ví dụ này.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm yếu hữu hiệu của bài toán tối ưu vector phụ thuộc tham số đã được nghiên cứu thông qua tập cải tiến. Cách tiếp cận và các kết quả đạt được là mới và khác với các kết quả đã có. Hơn nữa, với những điều chỉnh thích hợp, phương pháp vô hướng hóa này cũng có thể dùng để xem xét các tính chất khác của các ánh xạ nghiệm hữu hiệu cho các mô hình bài toán trên.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo là một phần kết quả đạt được trong đề tài nghiên cứu "Tiếp cận các mô hình tối ưu vector thông qua tập cải tiến", được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Đô, mã số: 04.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., & Khanh, P. Q. (2007). On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *135*(2), 271-284.https://doi.org/10.1007/s10957-007-9250-9

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2017). Continuity of approximate solution maps to vector equilibrium problems. *Journal of Industrial & Management Optimization*, *13*(4), 1685-1699.https://doi.org/10.3934/jimo.2017013

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2020). On the stability of approximate solutions to set-valued equilibrium problems. *Optimization*, *69*(7-8), 1583-1599.https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1646744

Berge, C. (1963). *Topological spaces*. Oliver and Boyd, London, 213 pages.

Chicco, M., Mignanego, F., Pusillo, L., & Tijs, S. (2011). Vector optimization problems via improvement sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *150*(3), 516-529.https://doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

Chicco, M., & Rossi, A. (2015). Existence of optimal points via improvement sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *167*(2), 487-501.https://doi.org/10.1007/s10957-015-0744-6

Dhingra, M., & Lalitha, C. S. (2017). Set optimization using improvement sets. *Yugoslav Journal of Operations Research*, *27*(2), 153-167.https://doi.org/10.2298/YJOR170115011D

Eichfelder, G., & Ha, T. X. D. (2013). Optimality conditions for vector optimization problems with variable ordering structures. *Optimization*, *62*(5), 597-627. https://doi.org/10.1080/02331934.2011.575939

Flores-Bazán, F., & Jiménez, B. (2009). Strict efficiency in set-valued optimization. *Siam Journal on Control and Optimization*, *48*(2), 881-908. https://doi.org/10.1137/07070139X

Fu, J. Y., & Wang, Y. H. (2003). Arcwise connected cone-convex functions and mathematical programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *118*(2), 339-352.https://doi.org/10.1023/A:1025451422581

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., &Zalinescu, C. (2003). *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer, Berlin.

Gutiérrez, C., Jiménez, B., & Novo, V. (2012). Improvement sets and vector optimization, *European J. Oper. Res*, *223*(2), 304-311.https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

Hernández, E., Rodríguez-Marín, L., & Sama, M. (2010). On solutions of set-valued optimization problems. *Computers and Mathematics with Applications*, *60*(5), 1401-1408. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.06.022

Hu, S., & Papageorgiou, N. (1997). *Handbook of multivalued analysis*, Volume I: Theory, Kluwer, Boston.https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6359-4

Jahn, J. (2009). *Vector optimization*, Springer, Berlin, 470 pages.

Jahn, J., & Ha, T. X. D. (2011). New order relations in set optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *148*(2), 209-236.https://doi.org/10.1007/s10957-010-9752-8

Khan, A. A., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*, Springer, Berlin, 781 pages.https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7

Kuroiwa, D. (2003). Existence theorems of set optimization with set-valued maps. *Journal of Information and Optimization Sciences*, *24*(1), 73-84 . https://doi.org/10.1080/02522667.2003.10699556

Lalitha, C. S., & Chatterjee, P. (2015). Stability and scalarization in vector optimization using improvement sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *166*(3), 825-843.https://doi.org/10.1007/s10957-014-0686-4

Liang, H., Wan, Z., & Zhang, L. (2020). The connectedness of the solutions set for set-valued vector equilibrium problems under improvement sets. *Journal of Inequalities and Applications*, *2020*(1), 1-14. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02397-7

Luc, D.T. (2005). Generalized convexity in vector optimization. In Luc, D.T. (Eds.), *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity*, 195-236.

Maeda, T. (2012). On optimization problems with set-valued objective maps: existence and optimality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *153*(2), 263-279. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9952-x

Mao, J., Wang, S., & Han, Y. (2019). The stability of the solution sets for set optimization problems via improvement sets. *Optimization*, *68*(11), 2171-2193. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1579813

Oppezzi, P., & Rossi, A. (2015). Improvement sets and convergence of optimal points. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *165*(2), 405-419. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0669-5

Qiu, Q., & Yang, X. (2010). Some properties of approximate solutions for vector optimization problem with set-valued functions. *Journal of Global Optimization*, *47*(1), 1-12. https://doi.org/10.1007/s10898-009-9452-9

Sach, P. H. (2005). New generalized convexity notion for set-valued maps and application to vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *125*(1), 157-179. https://doi.org/10.1007/s10957-004-1716-4

Wei, H. Z., Zuo, X., & Chen, C. R. (2020). Unified vector quasiequilibrium problems via improvement sets and nonlinear scalarization with stability analysis. *Numerical Algebra, Control & Optimization*, *10*(1), 107. https://doi.org/10.3934/naco.2019036

Zhao, K. Q., & Yang, X. M. (2013). A unified stability result with perturbations in vector optimization. *Optimization Letters*, *7*(8), 1913-1919. https://doi.org/10.1007/s11590-012-0533-1

Zhao, K. Q., Yang, X. M., & Peng, J. W. (2013). Weak E-optimal solution in vector optimization. *Taiwanese Journal ofMathematics*, *17*(4), 1287-1302. https://doi.org/10.1007/s11590-012-0533-1

Zhao, K. Q., & Yang, X. M. (2014). E-proper saddle points and E-proper duality in vector optimization with set-valued maps. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *18*(2), 483-495.https://doi.org/10.11650/tjm.18.2014.3473

Zhao, K. Q., & Yang, X. M. (2015). E-Benson proper efficiency in vector optimization. *Optimization*, *64*(4), 739-752. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.798321