Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2023.006

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR DỰA TRÊN NÓN THỨ TỰ KẾT HỢP

Lâm Quốc Anh[1], Phạm Thanh Dược[2*], Thái Đức Duy[1] và Lâm Thị Vân Khánh[1]
[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ*
[*]*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Phạm Thanh Dược (email: ptduoc@ctuet.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 29/09/2022
Ngày nhận bài sửa: 05/11/2022
Ngày duyệt đăng: 10/11/2022

Title:
Existence of solutions to vector optimization problems via mixed-ordered cones

Từ khóa:
Bài toán tối ưu vector, điều kiện tồn tại nghiệm, nón thứ tự kết hợp, tính đóng, tính lồi

Keywords:
Closedness, convexity, existence condition, mixed-ordered cone, vector optimization problem

ABSTRACT

In this paper, a new cone is introduced and the convexity of strongly efficient solution sets to vector optimization problems via this cone is also discussed. Firstly, a mixed-ordered cone based on the positive Orthant cone, the Lorentz cone, and the Lexicographic cone is proposed. Then, the properties of the above cone and the relationships between it and others cones are observed. Finally, existence conditions and the convexity of the solution set to the vector optimization problem are formulated.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, một nón mới được giới thiệu và tính lồi của tập nghiệm hữu hiệu mạnh của một bài toán tối ưu vector thông qua nón mới này cũng được thảo luận. Đầu tiên, một nón thứ tự kết hợp dựa trên nón Orthant dương, nón Lorentz và nón từ điển được giới thiệu. Sau đó, các tính chất của nón này và mối quan hệ giữa nó với các nón khác được khảo sát. Cuối cùng, điều kiện tồn tại và tính lồi của tập nghiệm của bài toán tối ưu vector dựa trên nón mới được thiết lập.

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết tối ưu hóa là một trong những công cụ quan trọng để nghiên cứu kinh tế, kỹ thuật và các lĩnh vực khác. Nói chung, các bài toán tối ưu hóa được xác định bởi $\min_{x\in X} f(x)$ hoặc $\max_{x\in X} f(x)$, trong đó f là một hàm có giá trị thực trên một tập khác rỗng X. Nếu f là một hàm có giá trị vector thì nó được gọi là "tối ưu hóa đa mục tiêu" hoặc "tối ưu hóa vector" (Luc, 1989; Ehrgott, 2005). Các chủ đề chính nghiên cứu về bài toán tối ưu vector bao gồm sự tồn tại nghiệm (Sawaragi et al., 1985; Sergienko et al., 2000; Kim et al., 2019), tính ổn định nghiệm (Tanino, 1988; Lucchetti & Miglierina, 2004; Peng et al., 2018), tính chất nghiệm (Helbig, 1990; Hirschberger, 2005; Peng et al., 2019; Anh et al., 2022), sự đặt chỉnh (Bednarczuk, 1987; Huang et al., 2006; Lalitha, 2014), điều kiện tối ưu và thuật toán (Bazaraa et al., 1993; Ehrgott, 2005; Ustun et al., 2021).

Cấu trúc một nón thứ tự đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu bài toán tối ưu đa mục tiêu. Trong không gian $\mathbb{R}^n$, một nón được sử dụng nhiều nhất là $\mathbb{R}^n_+$, nón này đưa ra các tiêu chí rất chặt và không dễ để các vấn đề thực tế trong cuộc sống đạt được. Một trong những nón mà có nhiều ứng dụng trong các trường hợp thực tế và dành được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong thời gian gần đây là nón Lorentz trong không gian $\mathbb{R}^n$. Các bài toán có liên quan đến tối ưu theo nón Lorentz đã được tập trung nghiên cứu (Fang et al., 2009; Dong et al., 2012; Pedro & Alberto, 2012; Wu & Chen, 2012; Anh & Danh, 2016; Chang et al., 2018; Bueno et al., 2021). Đối với mục đích ứng dụng, một nón khác cũng được xem xét, là nón từ điển (Anh et al., 2014, 2016; Anh & Duy, 2018; Bianchi et al., 2010; Konnov, 2003). Thật không may, hầu hết các kết quả hiện có cho các loại bài toán vector tổng quát liên quan đến tối ưu hóa không thể áp dụng cho các bài toán liên quan đến nón từ điển vì nón này không đóng cũng không mở.

Từ những quan sát trên, bài báo này trình bày một nón mới, nón này có liên quan mật thiết với ba nón vừa được đề cập ở phần trên. Hơn nữa, các tính chất đẹp của nón này cũng được nghiên cứu. Cuối cùng, áp dụng các kết quả đạt được vào bài toán tối ưu vector ứng với nón vừa đề xuất như là một ứng dụng minh họa.

Bài báo có cấu trúc như sau: Mục 2 trình bày các khái niệm và tính chất của nón Lorentz, nón từ điển, đồng thời cũng đề cập đến các khái niệm và tính chất của ánh xạ liên tục và ánh xạ lồi. Trong Mục 3, một nón thứ tự kết hợp được đề xuất và các tính chất của nó được thiết lập. Hơn nữa, mối quan hệ của nón này và các nón Lorentz, nón từ điển cũng được xây dựng. Mục 4 xét bài toán tối ưu vector theo nón mới, thiết lập điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm và tính lồi của tập nghiệm đối với bài toán dạng này. Mục 5 đưa ra các nhận xét về kết quả đạt được và một số định hướng nghiên cứu phát triển từ các kết quả chính của bài báo.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Mục này nhắc lại các khái niệm và tính chất được sử dụng trong các phần tiếp theo. Cho C là tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 2.1. Cho $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}) \in \mathbb{R}^n$, khi đó *chuẩn Euclide* của $\boldsymbol{v}$ được định nghĩa như sau:

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\,.$$

Định nghĩa 2.2. Cho $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, *khoảng cách Euclide giữa $\boldsymbol{v}$ và $\boldsymbol{u}$* chính là chuẩn $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|$.

Định nghĩa 2.3. Với $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ và $r > 0$, tập hợp $B(\boldsymbol{x_0}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\| < r\}$ được gọi là *quả cầu mở tâm $\boldsymbol{x_0}$, bán kính r*.

Định nghĩa 2.4. Tập hợp $U \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *lân cận* của $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ nếu

$$\exists r > 0, B(\boldsymbol{x_0}, r) \subset U.$$

Định nghĩa 2.5. Tập hợp $G \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập mở* nếu nó là lân cận của mọi điểm thuộc nó, tức là với mọi $\boldsymbol{x_0} \in G$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(\boldsymbol{x_0}, r) \subset G$.

Định nghĩa 2.6. Tập hợp $G \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập đóng* nếu $\mathbb{R}^n \backslash G$ là tập mở.

Định nghĩa 2.7. *Phần trong* của tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\operatorname{int}(A)$ là tập mở lớn nhất (theo nghĩa tập hợp) chứa trong A.

Định nghĩa 2.8. *Bao đóng* của tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\operatorname{cl}(A)$ là tập đóng nhỏ nhất (theo nghĩa tập hợp) chứa A.

Định nghĩa 2.9. Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in A$ và $t \in [0,1]$, ta có:

$$t\boldsymbol{x_1} + (1-t)\boldsymbol{x_2} \in A.$$

Định nghĩa 2.10. (Jahn, 2009) Tập C được gọi là *nón* nếu với mọi $\boldsymbol{x} \in C$ và $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ thì ta luôn có $\lambda\boldsymbol{x} \in C$.

Định nghĩa 2.11.

(a) Nón C được gọi là *rắn* nếu nó có phần trong khác rỗng, tức là $\operatorname{int}C \neq \emptyset$.

(b) Nón C được gọi là *lồi* nếu nó là tập lồi.

(c) Nón C được gọi là *đóng* nếu nó là tập đóng.

Định nghĩa 2.12. *Nón Orthant không âm* trong không gian $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\mathbb{R}^n_+$ được định nghĩa là:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1,n}\}.$$

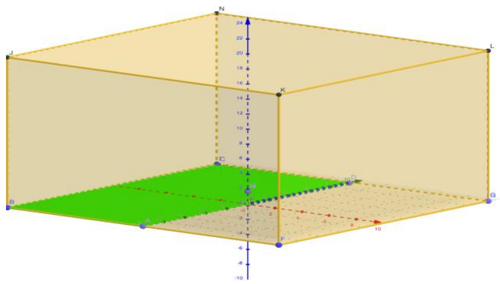
Định nghĩa 2.13. *Nón từ điển* (Lexicographic Cones) trong không gian $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\mathcal{C}^n_{lex}$ được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{C}^n_{lex} = \{\boldsymbol{0}\} \cup \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$\exists i = \overline{1,n}, x_i > 0, x_j = 0, j = \overline{i+1,n}\}.$$

Ví dụ 2.1. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta xác định được nón từ điển:

$$\mathcal{C}^3_{lex} = \{(0,0,0)\} \cup \{(x,y,z) : z > 0\} \cup \{(x,y,0) : y > 0\} \cup \{(x,0,0) : x > 0\}.$$



Hình 1. Nón từ điển trong không gian $\mathbb{R}^3$

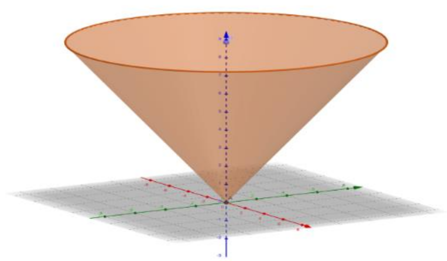
Định nghĩa 2.14. *Nón Lorentz* trong không gian $\mathbb{R}^n$ được xác định như sau:

$$\mathcal{C}^n_{lor} = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{x_1^2 + +x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right\}.$$

Ví dụ 2.2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tập

$$\mathcal{C}^3_{lor} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

là nón Lorentz.



Hình 2. Nón Lorentz trong không gian $\mathbb{R}^3$

Định nghĩa 2.15. (Luc, 1989) Cho hàm thực mở rộng $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(a) φ được gọi là *nửa liên tục trên* (usc) tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ nếu với mọi $\{\boldsymbol{x_n}\} \subseteq \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x_0}$ thì

$$\varphi(\boldsymbol{x_0}) \geq \lim \sup \varphi(\boldsymbol{x_n}).$$

(b) φ được gọi là *nửa liên tục dưới* (lsc) tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ nếu với mọi $\{\boldsymbol{x_n}\} \subseteq \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x_0}$ thì

$$\varphi(\boldsymbol{x_0}) \leq \lim \inf \varphi(\boldsymbol{x_n}).$$

(c) φ được gọi là *liên tục* tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ nếu φ vừa là usc và lsc tại $\boldsymbol{x_0}$.

Nhận xét 2.1. Hàm φ được gọi là nửa liên tục dưới tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ khi với mọi số thực $y < \varphi(\boldsymbol{x_0})$, tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của $\boldsymbol{x_0}$ sao cho $y < \varphi(\boldsymbol{x})$ với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$, hay với mọi $\varepsilon > 0$ thì ta luôn tìm được một lân cận $\mathcal{U}$ của $\boldsymbol{x_0}$ sao cho $\varphi(\boldsymbol{x_0}) - \varepsilon \leq \varphi(\boldsymbol{x})$ với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$ (Bourbaki 1987; Anh et al., 2019).

Trong phần còn lại của mục này, chúng ta giả sử rằng C là nón trong $\mathbb{R}^n$. Các khái niệm nửa liên tục của hàm vô hướng được mở rộng cho hàm vector trong không gian $\mathbb{R}^n$ như sau.

Định nghĩa 2.16. (Luc, 1989) Hàm $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được gọi là

(a) *C-nửa liên tục dưới* (C-lsc) tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $g(\boldsymbol{x_0})$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của $\boldsymbol{x_0}$ sao cho $g(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{V} + C$, với mọi $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$;

(b) C-*nửa liên tục trên* (C-usc) tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ nếu $-g$ là C-lsc tại $\boldsymbol{x_0}$;

(c) *C-liên tục* tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^m$ nếu nó vừa C-usc và C-lsc tại $\boldsymbol{x_0}$.

Cho $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ và $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$. Chúng ta xem xét tập $\boldsymbol{\alpha}$-mức dưới của hàm g như sau:

$$lev_{\boldsymbol{\alpha}} g = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\alpha} - C\}.$$

Định nghĩa 2.17. (Anh et al., 2022) Cho $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^m$. Ánh xạ g được gọi là

(a) *C-nửa giả liên tục dưới* (C-plsc) trên $\mathcal{X}$ nếu $lev_{\boldsymbol{\alpha}} g$ là đóng với mọi $\boldsymbol{\alpha} \in g(\mathcal{X})$;

(b) *C-nửa giả liên tục trên* (C-pusc) trên $\mathcal{X}$ nếu $-g$ là C-plsc trên $\mathcal{X}$;

(c) *C-giả liên tục* trên $\mathcal{X}$ nếu nó là C-pusc và C-plsc trên $\mathcal{X}$.

Nhận xét 2.2. Từ Định nghĩa 2.15 suy ra rằng g là C-lsc tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ nếu và chỉ nếu tập $lev_{g(\boldsymbol{x_0})} g$ là đóng. Vì vậy, nếu g là C-lsc tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ thì nó cũng là C-plsc trên $\{\boldsymbol{x_0}\}$.

Tương tự khái niệm liên tục, các khái niệm lồi của hàm vô hướng cũng được mở rộng cho hàm vector trong không gian sắp thứ tự theo nón như sau.

Định nghĩa 2.18. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng và lồi trong $\mathbb{R}^m$. Hàm $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được gọi là

(a) *C-lồi* trên $\mathcal{X}$ nếu với mọi $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \mathcal{X}$, $t \in [0,1]$,

$$g\big((1-t)\boldsymbol{x_1}+t\boldsymbol{x_2}\big)\in(1-t)g(\boldsymbol{x_1})+tg(\boldsymbol{x_2})-C;$$

(b) C-*tựa lồi tự nhiên* trên $\mathcal{X}$ nếu với $\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}\in\mathcal{X}$ và với mỗi $t\in[0,1]$ thì tồn tại $s\in[0,1]$ sao cho

$$g\big((1-t)\boldsymbol{x_1}+t\boldsymbol{x_2}\big)\in(1-s)g(\boldsymbol{x_1})+sg(\boldsymbol{x_2})-C;$$

(c) C-*tựa lồi* trên $\mathcal{X}$ nếu với tất cả $\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}\in\mathcal{X}$, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,1]$,

$$[\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}\in lev_{\boldsymbol{\alpha}}g]\Rightarrow[(1-t)\boldsymbol{x_1}+t\boldsymbol{x_2}\in lev_{\boldsymbol{\alpha}}g].$$

Nhận xét 2.3. Mọi hàm C-lồi là C-tựa lồi tự nhiên.

Nhận xét 2.4. Nếu C là nón lồi thì mọi hàm C-tựa lồi tự nhiên là C-tựa lồi. Thật vậy, giả sử g là hàm C-lồi trên $\mathcal{X}$ và $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$. Với mọi $\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}\in lev_{\boldsymbol{\alpha}}g$, nghĩa là

$$\begin{cases}g(\boldsymbol{x_1})\in\boldsymbol{\alpha}-C,\\ g(\boldsymbol{x_2})\in\boldsymbol{\alpha}-C.\end{cases}$$

Khi đó, tồn tại $\boldsymbol{c_1},\boldsymbol{c_2}\in C$ sao cho

$$\begin{cases}g(\boldsymbol{x_1})=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{c_1},\\ g(\boldsymbol{x_2})=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{c_2}.\end{cases}$$

Suy ra, với mọi $t\in[0,1]$ thì biểu thức sau đúng:

$$\begin{aligned}(1-t)g(\boldsymbol{x_1})+tg(\boldsymbol{x_2})&=(1-t)(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{c_1})+t(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{c_2})\\&=\boldsymbol{\alpha}-\big((1-t)\boldsymbol{c_1}+t\boldsymbol{c_2}\big).\end{aligned}$$

Vì C là lồi nên

$$(1-t)g(\boldsymbol{x_1})+tg(\boldsymbol{x_2})\in\boldsymbol{\alpha}-C,$$

với mọi $t\in[0,1]$. Điều này dẫn đến

$$(1-t)g(\boldsymbol{x_1})+tg(\boldsymbol{x_2})-C\in\boldsymbol{\alpha}-C,$$

với mọi $t\in[0,1]$.

Mặt khác, do g là C-*tựa lồi* tự nhiên trên $\mathcal{X}$ nên với mỗi $t\in[0,1]$, luôn tồn tại $s\in[0,1]$ sao cho

$$g\big((1-t)\boldsymbol{x_1}+t\boldsymbol{x_2}\big)\in(1-s)g(\boldsymbol{x_1})+sg(\boldsymbol{x_2})-C.$$

Khi đó,

$$g\big((1-t)\boldsymbol{x_1}+t\boldsymbol{x_2}\big)\in\boldsymbol{\alpha}-C.$$

Tương đương,

$$(1-t)\boldsymbol{x_1}+t\boldsymbol{x_2}\in lev_{\boldsymbol{\alpha}}g.$$

Vì vậy, g là C-tựa lồi trên $\mathcal{X}$.

Nhận xét 2.5. Trong trường hợp C là một nón không lồi thì Mệnh đề 2.1 là không đúng. Điều này được minh họa bởi ví dụ sau.

Ví dụ 2.3. Cho $C=\{(x,0):x\geq 0\}\cup\{(0,y):y\geq 0\}$, $\mathcal{X}=\mathbb{R}$, xét hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x)=(x,x+1).$$

Với mọi $x_1,x_2\in\mathcal{X},t\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}&f\big((1-t)x_1+tx_2\big)=\\&\big((1-t)x_1+tx_2,(1-t)x_1+tx_2+1\big)\\&\qquad\in(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-C\end{aligned}$$

Nên f là hàm C-lồi trên $\mathcal{X}$, do đó f là hàm C-lồi tự nhiên $\mathcal{X}$. Thế nhưng, nếu chọn $\boldsymbol{\alpha}=(4,3),x=2,y=4,t=\frac{1}{2}$ thì ta có được $x,y\in lev_{\boldsymbol{\alpha}}f$ nhưng $(1-t)x+ty=(3,4)\notin lev_{\boldsymbol{\alpha}}f$ nên f không là C-tựa lồi trên $\mathcal{X}$.

3. NÓN THỨ TỰ KẾT HỢP

Như đã được đề cập trong lời nói đầu, phần tiếp theo dành để đề xuất một nón mới.

Xét tập $\mathcal{K}^n\subset\mathbb{R}^n$ được xác định bởi:

$$\mathcal{K}^n=\mathbb{R}^n_+\cup\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\exists i=\overline{1,n}:x_i>0,\ x_i\geq\sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^{i-1}x_k^2},x_k=0,k=\overline{i+1,n}\right\}.$$

Mệnh đề 3.1. $\mathcal{K}^n$ là một nón trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh

Với mọi $\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}^n$ và $\in\mathbb{R}$, $\lambda\geq 0$.

Nếu $\lambda=\mathbf{0}$ thì $\lambda\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}^n$.

Nếu $\lambda\neq\mathbf{0}$ thì các trường hợp sau được xem xét:

Trường hợp 1: Nếu $\boldsymbol{x}$ có các thành phần đều không âm, hay

$$x_i\geq 0,\text{với mọi i}=1,\text{n}$$

thì

$$\lambda\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+\subset\mathcal{K}^n.$$

Trường hợp 2: Nếu $\boldsymbol{x}$ có ít nhất một thành phần âm, khi đó, từ sự xác định của $\mathcal{K}^n$, tồn tại $i\in\{1,\dots,n\}$ sao cho:

$$x_i>0,x_i\geq\sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^{i-1}x_k^2},x_k=0,k=\overline{i+1,n}.$$

Suy ra,

$$\lambda x_i > 0, \lambda x_i \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} (\lambda x_k)^2}, \lambda x_k = 0,$$

với mọi $k = \overline{i+1, n}$. Do đó, $\lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{K}^n$.

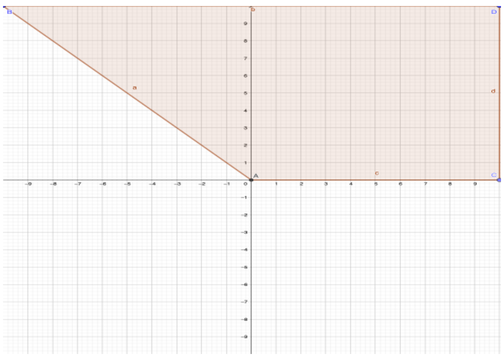
Vậy $\mathcal{K}^n$ là một nón trong không gian $\mathbb{R}^n$. ■

Định nghĩa 3.1. Tập $\mathcal{K}^n$ được xây dựng như trên được gọi là *nón thứ tự kết hợp*.

Ví dụ 3.1. Trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$, tập

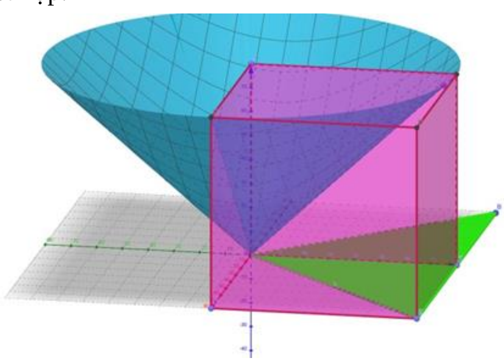
$$\mathcal{K}^2 = \mathbb{R}^2_+ \cup \{(x,y): y > 0, y \geq |x|\} \cup \{(x,0): x > 0\}$$

là nón thứ tự kết hợp.



Hình 3. Nón thứ tự kết hợp trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$

Ví dụ 3.2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, tập $\mathcal{K}^3 = \mathbb{R}^3_+ \cup \left\{(x,y,z): z > 0, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\} \cup \{(x,y,0): y \geq |x|\} \cup \{(x,0,0): x > 0\}$ là nón thứ tự kết hợp.



Hình 4. Nón thứ tự kết hợp trong không gian $\mathbb{R}^3$

Nhận xét 3.1. (a) Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta thấy $\mathcal{K}^n$ là nón lồi với $n \leq 2$ và không lồi với $n > 2$.

(b) Trong thời gian gần đây, xuất phát từ các tình huống thực tế nên đã có nhiều công trình khảo sát các mô hình tối ưu vector với nón thứ tự có phần trong bằng rỗng, và đề xuất nhiều khái niệm liên quan đến trội, tính lồi và tính đơn điệu cho các hàm vector được cho trong các không gian này (xem Bao & Tammer (2019), Gutiérrez et al. (2021), Khoshkhabar-Amiranloo & Khorram (2016), Tuyen (2016)). Tất nhiên, các nón có phần trong bằng rỗng hầu như là không lồi, do đó phần tiếp theo trong bài báo này chúng tôi sẽ nghiên cứu các mô hình tối ưu được sắp thứ tự bởi $\mathcal{K}^n$ mà không cần giả thiết $n \leq 2$ hoặc làm việc trên bao lồi của chúng.

Mệnh đề 3.2. $\mathcal{K}^n$ là hợp của $n+1$ nón lồi.

Chứng minh

Ta xét

$$B_i = \{\mathbf{0}\} \cup \left\{(x_1, \dots, x_n): x_i > 0, x_i \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} x_k^2},\right.$$
$$\left. x_k = 0, k = \overline{i+1, n}\right\},$$

với mọi $i = \overline{1, n}$. Dễ thấy

$$\mathcal{K}^n = \mathbb{R}^n_+ \cup \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right).$$

Với mọi $i = \overline{1, n}$, B_i là nón.

Lấy một vector bất kỳ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_i$ và với mọi $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$.

Nếu $\lambda = \mathbf{0}$ thì $\lambda \boldsymbol{x} \in B_i$.

Nếu $\lambda \neq \mathbf{0}$ thì

$$\begin{cases} x_k = 0, x_i > 0, k = \overline{i+1, n}, \\ x_i > \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} x_k^2}. \end{cases}$$

Suy ra,

$$\begin{cases} \lambda x_k = 0, \lambda x_i > 0, k = \overline{i+1, n}, \\ \lambda x_i > \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} (\lambda x_k)^2}. \end{cases}$$

Do đó, $\lambda \boldsymbol{x} \in B_i$.

Vậy B_i là nón với mọi $i = \overline{1, n}$.

Với mọi $i = \overline{1, n}$, B_i là tập lồi.

Với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_i$ và $t \in [0,1]$, giả sử

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, xét điểm

$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} = (tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2, \dots, tx_n + (1-t)y_n)$.

Nếu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ thì $(1-t)\boldsymbol{y} \in B_i$ (Do B_i là nón).

Nếu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ thì $t\boldsymbol{x} \in B_i$ (Do B_i là nón).

Nếu $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ và $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, khi đó:

$$\begin{cases} x_k = y_k = 0, x_i > 0, y_i > 0, k = \overline{i+1, n} \\ x_i \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} x_k^2}, y_i \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} y_k^2}. \end{cases}$$

Suy ra,

$$\begin{cases} tx_k + (1-t)y_k = 0, k = \overline{i+1, n}, \\ tx_i + (1-t)y_i > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Minkowski,

$$tx_i + (1-t)y_i \geq t\sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} x_k^2} + (1-t)\sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} y_k^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} (tx_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} \left((1-t)y_k\right)^2}$$

$$\geq \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} (tx_k + (1-t)y_k)^2}. \quad (3.2)$$

Từ (3.1) và (3.2), suy ra

$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in B_i.$$

Vậy, B_i là tập lồi với $i = \overline{1, n}$. ■

Mệnh đề 3.3. $\mathcal{K}^n$ là một nón đóng.

Chứng minh

Áp dụng Mệnh đề 3.2, ta có:

$$\mathcal{K}^n = \mathbb{R}_+^n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right),$$

trong đó, $\mathbb{R}_+^n$ là nón đóng và B_i là nón với $i = \overline{1, n}$, nên ta chỉ cần chứng minh B_i là tập đóng với $i = \overline{1, n}$.

Với mọi dãy $\{\boldsymbol{x}^k\} \subset B_i$ mà $\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, ta chứng minh $\boldsymbol{x}^* \in B_i$.

Vì $\boldsymbol{x}^k \to \boldsymbol{x}^*$ nên $x_j^k \to x_j^*$ với $j = \overline{1, n}$.

Mà $x_j^k = 0$ với $j = \overline{i+1, n}$.

Suy ra,

$$x_j^* = 0 \text{ với } j = \overline{i+1, n}. \quad (3.3)$$

Ta cũng có $x_i^k > 0$ với mọi k, do đó

$$x_i^* > 0. \quad (3.4)$$

Mặt khác,

$$x_i^k \geq \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} \left(x_j^k\right)^2}.$$

Lấy giới hạn hai vế, ta được:

$$x_i^* \geq \sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{i-1} \left(x_j^*\right)^2}. \quad (3.5)$$

Từ (3.3), (3.4) và (3.5) , ta được:

$$\boldsymbol{x}^* \in B_i.$$

Kéo theo, B_i là tập đóng với $i = \overline{1, n}$.

Vậy $\mathcal{K}^n$ là một nón đóng. ■

Mệnh đề 3.4. Trong không gian $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{C}_{lor}^n \subset \mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}_{lex}^n.$$

Chứng minh

Với mọi $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C}_{lor}^n$, ta có:

$$x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2} \geq 0$$

Nếu $x_n = 0$ thì ta suy ra $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ hay $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Suy ra, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}^n$.

Nếu $x_n > 0$ thì cùng với bất đẳng thức

$x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ ta suy ra

$\boldsymbol{x} \in B_n \subset \mathcal{K}^n$.

Vậy, $\mathcal{C}_{lor}^n \subset \mathcal{K}^n$.

Với mọi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{K}^n$:

*Nếu $x \in \mathbb{R}_+^n$ thì suy ra được $x \in \mathcal{C}_{lex}^n$.

*Nếu $x \notin \mathbb{R}_+^n$ thì theo định nghĩa của nón, tồn tại $i = \overline{1, n}$ sao cho:

$$x_i > 0, x_i \geq \sqrt{\sum_{k=1}^{i-1} x_k^2}, x_k = 0, k = \overline{i+1, n}.$$

Do đó, $x \in \mathcal{C}_{lex}^n$.

Từ cả hai trường hợp, ta kết luận được $x \in \mathcal{C}_{lex}^n$ với mọi $x \in \mathcal{K}^n$.

Vậy, $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}_{lex}^n$. ■

Để kết thúc mục này chúng ta xét các điểm tối ưu của một tập con không rỗng của $\mathbb{R}^n$ thông qua nón $\mathcal{K}^n$, các kết quả này là nền tảng để xem xét các dạng nghiệm hữu hiệu được xem xét ở mục tiếp theo.

Cho $A \subset \mathbb{R}^n$ là một tập con khác rỗng và $a \in A$. Khi đó, a được gọi là điểm cực tiểu (cực tiểu mạnh) của A nếu và chỉ nếu

$$(a - \mathcal{K}^n) \cap A = \{a\}$$

$$\big((a + \mathcal{K}^n) \cap A = A, \text{tương ứng}\big).$$

Điểm a được gọi là điểm cực đại (cực đại mạnh) của A nếu vè chỉ nếu

$$(a + \mathcal{K}^n) \cap A = \{a\}$$

$$\big((a - \mathcal{K}^n) \cap A = A, \text{tương ứng}\big).$$

Ví dụ 3.3. Trong $\mathbb{R}^2$, cho $A = \{(1,3), (4,1), (2,2)\}$. Khi đó đối với nón thứ tự $\mathcal{K}^2$, tập các điểm cực tiểu và cực tiểu mạnh của A là tập rỗng, vì độ lệch của giá trị thứ hai chưa đủ mức ý nghĩa để đánh giá là lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) giá trị đang được so sánh.

Ví dụ 3.4. Trong $\mathbb{R}^3$, cho tập $A = \{(7,8,7), (7,9,5), (6,7,9)\}$. Khi đó, đối với nón thứ tự $\mathcal{K}^3$, điểm $(6,7,9)$ là điểm cực đại (và cũng là điểm cực đại mạnh) của tập A.

4. BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR

Xét bài toán tối ưu vector như sau:

$$\text{(VOP)} \qquad \min_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

trong đó $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là một hàm vector và $\mathcal{X}$ là một tập con không rỗng của $\mathbb{R}^m$.

Định nghĩa 4.1. Một phần tử $\boldsymbol{x_0} \in \mathcal{X}$ được gọi là

(a) *nghiệm hữu hiệu* của bài toán (VOP), ký hiệu là $\boldsymbol{x_0} \in Eff(\mathcal{X}, f)$ nếu $f(x_0)$ là điểm cực tiểu của $f(\mathcal{X})$;

(b) *nghiệm hữu hiệu mạnh* của bài toán (VOP), ký hiệu là $\boldsymbol{x_0} \in SEff(\mathcal{X}, f)$ nếu $f(x_0)$ là điểm cực tiểu mạnh của $f(\mathcal{X})$.

Định nghĩa 4.2. (Định nghĩa 2.19, Ansari et al., 2018) Một hàm vector $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được gọi là $\mathcal{K}^n$-*hướng xuống* trên $\mathcal{X}$ nếu với bất kỳ $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \mathcal{X}$, tồn tại $\boldsymbol{x_0} \in \mathcal{X}$ sao cho

$$f(\boldsymbol{x_0}) \in f(\boldsymbol{x_1}) - \mathcal{K}^n \text{ và } f(\boldsymbol{x_0}) \in f(\boldsymbol{x_2}) - \mathcal{K}^n.$$

Bây giờ, chúng ta xem xét điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán (VOP).

Định lý 4.1. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con không rỗng, compact trong $\mathbb{R}^m$. Giả sử rằng f là $\mathcal{K}^n$-hướng xuống đồng thời là $\mathcal{K}^n$-nửa giả liên tục dưới trên $\mathcal{X}$. Khi đó, tập $SEff(\mathcal{X}, f)$ khác rỗng.

Chứng minh

Với mỗi $\in \mathcal{X}$, ta xem xét tập sau:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{z}) = \{\overline{\boldsymbol{z}} \in \mathcal{X}: f(\overline{\boldsymbol{z}}) \in f(\boldsymbol{z}) - \mathcal{K}^n\}.$$

Khi đó, $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{z})$, và do đó $\mathcal{L}(\boldsymbol{z})$ khác rỗng. Vì $\mathcal{X}$ là đóng và f là $\mathcal{K}^n$-nửa giả liên tục dưới trên $\mathcal{X}$ nên tập $\mathcal{L}(\boldsymbol{z}) = lev_{f(\boldsymbol{z})} f \cap \mathcal{X}$ là đóng. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$\bigcap_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(\boldsymbol{z}) \neq \emptyset. \qquad (4.1)$$

Lấy $\{\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}, \ldots, \boldsymbol{z_k}\}$ là một tập con hữu hạn của $\mathcal{X}$. Vì f là $\mathcal{K}^n$-hướng xuống nên tồn tại $\boldsymbol{z_0} \in \mathcal{X}$ sao cho

$$f(\boldsymbol{z_0}) \in f(\boldsymbol{z_i}) - \mathcal{K}^n, i = \overline{1, k}.$$

Hệ quả là, $\boldsymbol{z_0} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{z_i})$ với mọi $i = \overline{1, k}$, và

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{L}(\boldsymbol{z_i}) \neq \emptyset.$$

Vì k là bất kỳ, $\mathcal{X}$ là tập compact, và với mỗi vector $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$, $\mathcal{L}(\boldsymbol{x})$ là tập con đóng của $\mathcal{X}$ nên (4.1) được suy ra từ Định lý 4.2.2 trong Pervin (2014). Lấy tùy ý một vector $\boldsymbol{x_0} \in \bigcap_{z \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(\boldsymbol{z})$, ta được

$$f(\boldsymbol{x_0}) \in f(\boldsymbol{z}) - \mathcal{K}^n, \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{X}.$$

Vì vậy, $\boldsymbol{x_0}$ là một phần tử của $SEff(\mathcal{X}, f)$. Hay tập $SEff(\mathcal{X}, f)$ khác rỗng. ■

Nhận xét 4.1. Trong Ansari et al., 2018, dựa vào điều kiện nửa liên tục của hàm mục tiêu, tác giả đã thiết lập được sự tồn tại của nghiệm hữu hiệu cho bài toán tối ưu vector được cho trong không gian được sắp thứ tự bởi nón lồi đóng có đỉnh (xem Định lý 3.12). Như đã đề cập ở mục trước, nón K^n nói chung không lồi, và hơn nữa trong định lý trên, điều kiện nửa liên tục đã được giảm nhẹ bằng điều kiện giả nửa liên tục, nên cách tiếp cận và kết quả đạt được trong Định lý 4.1 là khác so với các kết quả trong công trình vừa được đề cập ở trên.

Chúng ta thiết lập các điều kiện lồi cho tập nghiệm hữu hiệu mạnh của bài toán tối ưu vector bằng cách tiếp cận trực tiếp.

Định lý 4.2. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con lồi không rỗng và compact của $\mathbb{R}^m$. Giả sử rằng

(i) f là $\mathcal{K}^n$-nửa giả liên tục dưới trên $\mathcal{X}$;

(ii) f là $\mathcal{K}^n$-hướng xuống trên $\mathcal{X}$;

(iii) với mỗi $z \in \mathcal{X}$, tập $\{x \in \mathcal{X}: f(z) - f(x) \in \mathcal{K}^n\}$ là lồi.

Khi đó, $SEff(\mathcal{X}, f)$ là lồi.

Chứng minh

Áp dụng Định lý 4.1, tập $SEff(\mathcal{X}, f)$ không rỗng. Lấy $\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2} \in SEff(\mathcal{X}, f)$ tùy ý. Vì $SEff(\mathcal{X}, f) = \bigcap_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(\boldsymbol{z})$ nên với mọi $\boldsymbol{z} \in \mathcal{X}$,

$$f(\boldsymbol{z_1}) \in f(\boldsymbol{z}) - \mathcal{K}^n \text{ và } f(\boldsymbol{z_2}) \in f(\boldsymbol{z}) - \mathcal{K}^n.$$

Mặt khác, vì (iii) nên với mọi $t \in [0,1]$, ta được

$$f\big((1-t)\boldsymbol{z_1} + t\boldsymbol{z_2}\big) \in f(\boldsymbol{z}) - \mathcal{K}^n.$$

Tương đương,

$$(1-t)\boldsymbol{z_1} + t\boldsymbol{z_2} \in SEff(\mathcal{X}, f).$$

Vậy, $SEff(\mathcal{X}, f)$ là lồi. ■

Ví dụ 4.1. Cho $\mathcal{X} = [-1,1]$, và $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} (x, x), \text{ nếu } x > 0, \\ (0,0), \text{ nếu } x \leq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, f liên tục trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, thì ta được $(0,0) \in f(x_1) - \mathcal{K}^2$ và $(0,0) \in f(x_2) - \mathcal{K}^2$. Khi đó, đặt $x_0 = 0$, ta được $f(x_0) \in f(x_1) - \mathcal{K}^2$ và $f(x_0) \in f(x_2) - \mathcal{K}^2$. Vì vậy, ta suy ra được f là $\mathcal{K}^2$-hướng xuống trên $\mathcal{X}$. Hơn nữa, với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R}^2, t \in [0,1]$, giả sử rằng

$$f(z) - f(x_1) \in \mathcal{K}^2 \text{ và } f(z) - f(x_2) \in \mathcal{K}^2.$$

Nếu $x_1 \leq 0$ và $x_2 \leq 0$ thì ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) = (0,0) \in \alpha - \mathcal{K}^2, \\ f(x_2) = (0,0) \in \alpha - \mathcal{K}^2. \end{cases}$$

Suy ra, $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (0,0) \in \alpha - \mathcal{K}^2$.

Nếu $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$, thì ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) = (x_1, x_1) \in \alpha - \mathcal{K}^2, \\ f(x_2) = (x_2, x_2) \in \alpha - \mathcal{K}^2. \end{cases}$$

Do đó, $f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = \big((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \in \alpha - \mathcal{K}^2$ (Do $\mathcal{K}^2$ là nón lồi).

Nếu x_1, x_2 có một số lớn hơn 0, một số nhỏ hơn hoặc bằng 0, không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 > 0$ và $x_2 \leq 0$, thì ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) = (x_1, x_1) \in \alpha - \mathcal{K}^2, \\ f(x_2) = (0,0) \in \alpha - \mathcal{K}^2. \end{cases}$$

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $(1-t)x_1 + tx_2 > 0$. Ta được:

$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = \big((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)f(x_1) + t(x_2, x_2) \in \alpha - \mathcal{K}^2$ vì $\mathcal{K}^2$ là nón lồi.

Trường hợp 2: $(1-t)x_1 + tx_2 \leq 0$. Suy ra,

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (0,0) \in \alpha - \mathcal{K}^2.$$

Do đó,

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in lev_\alpha f.$$

Vì thế, tập $\{x \in \mathcal{X}: f(z) - f(x) \in \mathcal{K}^2\}$ là lồi.

Áp dụng Định lý 4.2, ta được $SEff(\mathcal{X}, f)$ là lồi.

Mặt khác, bằng cách sử dụng Định nghĩa 4.1, ta có thể chỉ ra rằng $SEff(\mathcal{X}, f) = [-1,0]$ là tập lồi.

Ví dụ 4.2. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, ta xét

$$B_1 = \{(x, 0,0): x > 0\},$$

$$B_2 = \{(x, y, 0): y > 0, y \geq |x|\},$$

$$B_3 = \{(x, y, z): z > 0, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Khi đó, $\mathcal{K}^3 = \mathbb{R}^3_+ \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3$ là một nón thứ tự kết hợp trong $\mathbb{R}^3$. Cho $\mathcal{X} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ và $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} (0,0,0) \text{ nếu } x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right], \\ (x^2, x, 0) \text{ nếu } x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Rõ ràng, f liên tục trên $\mathcal{X}$. Mặt khác, với $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ thì ta được

$$\begin{cases} (0,0,0) \in f(x_1) - K^3, \\ (0,0,0) \in f(x_2) - K^3. \end{cases}$$

Do đó, f là $\mathcal{K}^3$-hướng xuống trên $\mathcal{X}$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng: Với mọi $x_1, x_2, z \in \mathcal{X}$, nếu $f(z) - f(x_1) \in \mathcal{K}^3$ và $f(z) - f(x_2) \in \mathcal{K}^3$ thì:

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \in \mathcal{K}^3, \forall t \in [0,1].$$

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $z \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, ta được $f(z) = (0,0,0)$.

Khi đó, nếu x_1, x_2 cùng thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ thì $(1-t)x_1 + tx_2$ cũng thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Vì vậy, $f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (0,0,0) \in K^3$.

Nếu x_1, x_2 cùng thuộc đoạn $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ thì

$$\begin{cases} f(z) - f(x_1) = (-x_1^2, -x_1, 0) \in \mathcal{K}^3, \\ f(z) - f(x_2) = (-x_2^2, -x_2, 0) \in \mathcal{K}^3. \end{cases}$$

Hệ quả là $x_1 = x_2 = 0$. Do đó,

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (0,0,0) \in \mathcal{K}^3.$$

Nếu x_1, x_2 thỏa mãn một số thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ và số còn lại thuộc $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ thì không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], x_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Khi đó,

$$\begin{cases} f(z) - f(x_1) = (0,0,0) \in \mathcal{K}^3, \\ f(z) - f(x_2) = (-x_2^2, -x_2, 0) \in \mathcal{K}^3. \end{cases}$$

Điều này dẫn đến $x_2 = 0$. Do đó,

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big)$$
$$= f(z) - f\big((1-t)x_1\big) = (0,0,0) \in \mathcal{K}^3.$$

Vì vậy,

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \in \mathcal{K}^3, \forall z \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Trường hợp 2: $z \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, ta được $f(z) = (z^2, z, 0)$.

Khi đó, nếu x_1, x_2 cùng thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ thì $(1-t)x_1 + tx_2$ cũng thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Suy ra,

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (z^2, z, 0) \in K^3.$$

Nếu x_1, x_2 cùng thuộc đoạn $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ thì ta được

$$f(z) - f(x_1) = (z^2 - x_1^2, z - x_1, 0) \in \mathcal{K}^3.$$

Điều này kết hợp với $x_1, z \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ suy ra

$$\begin{cases} z - x_1 \geq 0, \\ z - x_1 = |z - x_1| \geq |z - x_1||z + x_1| = |z^2 - x_1^2|. \end{cases}$$

Tức là,

$$f(z) - f(x_1) \in B_2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{cases} z - x_2 \geq 0, \\ z - x_2 = |z - x_2| \geq |z - x_2||z + x_2| = |z^2 - x_2^2|. \end{cases}$$

hay

$$f(z) - f(x_2) \in B_2.$$

Vì $z - x_1 \geq 0$ và $z - x_2 \geq 0$ nên với mọi $t \in [0,1]$, ta được:

$$z - [(1-t)z_1 + tz_2] \geq 0.$$

Ta có:

$$z - (1-t)x_1 - tx_2 = |z - (1-t)x_1 - tx_2|$$
$$\geq |z - (1-t)x_1 - tx_2||z + (1-t)x_1 + tx_2|$$
$$= |z^2 - [(1-t)x_1 + tx_2]^2|.$$

Điều này dẫn đến

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \in B_2,$$

và ta suy ra

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \in \mathcal{K}^3.$$

Nếu x_1, x_2 thỏa mãn một số thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ và số còn lại thuộc $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ thì không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], x_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Khi đó,

$$\begin{cases} f(z) - f(x_1) = (z^2, z, 0) \in \mathcal{K}^3, \\ f(z) - f(x_2) = (z^2 - x_2^2, z - x_2, 0) \in \mathcal{K}^3. \end{cases}$$

Tương đương,

$$\begin{cases} (z^2, z, 0) \in \mathcal{K}^3, \\ z \geq x_2, \\ z - x_2 = |z - x_2| \geq |z - x_2||z + x_2| = |z^2 - x_2^2|. \end{cases}$$

Vì $x_1 \leq 0 < x_2 \leq z$ và $t \in [0,1]$ nên ta được

$$(1-t)x_1 + tx_2 \leq z.$$

Giả sử $(1-t)x_1 + tx_2 \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, thì ta được

$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (z^2, z, 0) \in \mathcal{K}^3.$

Ngược lại, $(1-t)x_1 + tx_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ thì ta được

$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (z^2 - [(1-t)x_1 + tx_2]^2, z - (1-t)x_1 - tx_2, 0).$

Vì $(1-t)x_1 + tx_2 \leq z$ và $0 \leq (1-t)x_1 + tx_2 \leq \frac{1}{2}$ nên ta kết luận rằng

$$z - [(1-t)z_1 + tz_2] \geq 0.$$

Điều này kéo theo

$$z - (1-t)x_1 - tx_2 = |z - (1-t)x_1 - tx_2|$$
$$\geq |z - (1-t)x_1 - tx_2||z + (1-t)x_1 + tx_2|$$
$$= |z^2 - [(1-t)x_1 + tx_2]^2|.$$

Hệ quả là,

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \in B_2,$$

tương đương,

$$f(z) - f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \in \mathcal{K}^3.$$

Vì vậy, các giả thiết của Định lý 4.2 thỏa mãn, hay $SEff(\mathcal{X}, f)$ là lồi. Mặt khác, bằng cách sử dụng Định nghĩa 4.1, ta có thể chỉ ra rằng $SEff(\mathcal{X}, f) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ là tập lồi.

5. KẾT LUẬN

Bài báo này giới thiệu và khảo sát một nón thứ tự kết hợp, gồm nón Orthant dương, nón Lorentz và nón từ điển. Đồng thời, điều kiện tồn tại và tính lồi của tập nghiệm đối với bài toán tối ưu vector dựa trên nón này cũng được thiết lập. Hơn nữa, mặc dù bài báo này chỉ xem xét lớp bài toán trong không gian hữu hạn chiều, nhưng các kỹ thuật được sử dụng trong các Định lý 4.1 và 4.2 hoàn toàn có thể mở rộng trong trường hợp bài toán tối ưu vector được cho trong không gian vô hạn chiều mà không cần đến điều kiện lồi và rắn của sắp thứ tự.

LỜI CẢM TẠ

Đây là một kết quả của đề tài "Tính chất tập nghiệm của bài toán tối ưu đa mục tiêu", mã số: TSV2022-140, được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., Anh, N. T., Duoc, P. T, Khanh, L. T. V., & Thu, P. T. A. (2022). The connectedness of weakly and strongly efficient solution sets of nonconvex vector equilibrium problems, *Applied Set-Valued Analysis Optimization, 4*, 109-127.

Anh, L. Q., & Duy, T. Q. (2018). On penalty method for equilibrium problems in lexicographic order. *Positivity*, *22*, 39-57.

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Hien, D. V. (2019). Stability for parametric vector quasi-equilibrium problems with variable cones. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *40*, 461-483.

Anh, L. Q., & Danh, N. H. (2016). Tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng mạnh theo nón Lorentz. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, 43, 26-33.

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Khanh, P. Q. (2016). Continuity properties of solution maps of parametric lexicographic equilibrium problems. *Positivity*, *20*, 61-80.

Anh, L. Q., Duy, T. Q., Kruger, A. Y., & Thao, N. H. (2014). Well-posedness for lexicographic vector equilibrium problems. In *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics* (pp. 159-174), Springer, New York.

Ansari, Q. H, Köbis, E., & Yao, J. C. (2018). *Vector Variational inequalities and vector optimization*, Springer, Berlin.

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (1990). *Set-valued analysis*, Birkhäuser Boston Inc., Boston.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2013). *Nonlinear programming: theory and algorithms*. John Wiley & Sons.

Bao, T. Q., & Tammer, C. (2019). Scalarization functionals with uniform level sets in set optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications, 182(1)*, 310-335.

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2013). *Nonlinear programming: theory and algorithms*. John Wiley & Sons.

Bednarczuk, E. (1987). Well posedness of vector optimization problems. In *recent advances and historical development of vector optimization* (pp. 51-61). Springer, Berlin, Heidelberg.

Bianchi, M., Konnov, I. V., & Pini, R. (2010). Lexicographic and sequential equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, *46*, 551-560.

Bourbaki, N. (2013). *General topology: Chapters 1–4,* Springer, Berlin.

Bueno, M. I., Furtado, S., & Sivakumar, K. C. (2021). Linear maps preserving the Lorentz-cone spectrum in certain subspaces of M_n. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, *15*(3), 1-20.

Chang, Y. L., Huang, C. H., Chen, J. S., & Hu, C. C. (2018). Some inequalities for means defined on the Lorentz cone. *Mathematical Inequalities and Applications*, *21*(4), 1015-1028.

Dong, L., Tang, J., & Zhou, J. (2012). A smoothing Newton algorithm for solving the monotone second-order cone complementarity problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *40*(1), 45-61.

Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria optimization* (Vol. 491). Springer Science & Business Media.

Fang, L., He, G., & Hu, Y. (2009). A new smoothing Newton-type method for second-order cone programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, *215*(3), 1020-1029.

Gajardo, P., & Seeger, A. (2014). Equilibrium problems involving the Lorentz cone. *Journal of Global Optimization*, *58*(2), 321-340.

Gutiérrez, C., Huerga, L., Köbis, E., Tammer, C. (2021). A scalarization scheme for binary relations with applications to set-valued and robust optimization. Journal of Global Optimization, 79(1), 233-256.

Helbig, S. (1990). On the connectedness of the set of weakly efficient points of a vector optimization problem in locally convex spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications, 65*(2), 257-270.

Hirschberger, M. (2005). Connectedness of efficient points in convex and convex transformable vector optimization. *Optimization*, *54*(3), 283-304.

Huang, X. X., & Yang, X. Q. (2006). Generalized Levitin--Polyak well-posedness in constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, *17*(1), 243-258.

Jahn, J. (2009). *Vector optimization*, Springer, Berlin.

Khoshkhabar-Amiranloo, S., Khorram, E. (2016). Scalar characterizations of cone-continuous set-valued maps. *Applicable Analysis, 95(12)*, 2750-2765.

Kim, D. S., Phạm, T. S., & Tuyen, N. V. (2019). On the existence of Pareto solutions for polynomial vector optimization problems. *Mathematical Programming*, *177*(1), 321-341.

Konnov, I. V. (2003). On lexicographic vector equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118, 681-688.

Lalitha, C. S., & Chatterjee, P. (2014). Levitin–Polyak well-posedness for constrained quasiconvex vector optimization problems. *Journal of Global Optimization*, *59*(1), 191-205.

Luc, D. T (1989). *Theory of vector optimization: lecture notes in economics and mathematical systems*, vol. 319, Springer, Berlin.

Lucchetti, R. E., & Miglierina, E. (2004). Stability for convex vector optimization problems. *Optimization*, *53*(5-6), 517-528.

Peng, Z. Y., Peng, J. W., Long, X. J., & Yao, J. C. (2018). On the stability of solutions for semi-infinite vector optimization problems. *Journal of Global Optimization*, *70*(1), 55-69.

Peng, Z. Y., Wang, X., & Yang, X. M. (2019). Connectedness of approximate efficient solutions for generalized semi-infinite vector optimization problems. *Set-Valued and Variational Analysis*, *27*(1), 103-118.

Pervin, W. J. (2014). *Foundations of general topology*. Academic Press, London.

Sawaragi, Y., Nakayama, H., & Tanino, T. (Eds.). (1985). *Theory of multiobjective optimization*. Elsevier.

Sergienko, I. V., Lebedeva, T. T., & Semenova, N. V. (2000). Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, *36*(6), 823-828.

Tanino, T. (1988). Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *26*(3), 521-536.

Tuyen, N. V. (2016). Convergence of the relative Pareto efficient sets. *Taiwanese Journal of Mathematics, 20(5),* 1149-1173.

Ustun, D., Carbas, S., & Toktas, A. (2021). Multi-objective optimization of engineering design problems through pareto-based bat algorithm. In *Applications of Bat Algorithm and its Variants* (pp. 19-43). Springer, Singapore.

Wu, J., & Chen, J. S. (2012). A proximal point algorithm for the monotone second-order cone complementarity problem. *Computational Optimization and Applications*, *51*(3), 1037-1063.