Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.151

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM VÀ ĐẶT CHỈNH ZOLEZZI CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTOR YẾU VÀ MẠNH

Lâm Quốc Anh[1], Trương Thị Mỹ Dung[2*] và Trần Ngọc Tâm[3]
[1]*Bộ môn Sư phạm Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Bộ môn Toán, Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*
[3]*Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Trương Thị Mỹ Dung (email: ttmdung@tdu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 17/02/2022
Ngày nhận bài sửa: 14/05/2022
Ngày duyệt đăng: 24/05/2022

Title:
Existence of solutions and Zolezzi wellposedness for weak and strong vector equilibrium problems

Từ khóa:
Bài toán cân bằng vector, đặt chỉnh Zolezzi, phần trong đại số, tính nửa liên tục

Keywords:
Algebraic interior, semicontinuity, Zolezzi wellposedness, vector equilibrium problem

ABSTRACT

In this paper, vector equilibrium problems in the sense of weak and strong types are investigated via an ordering cone with nonempty algebraic interior. Firstly, analytic structure in linear spaces along with their properties is discussed. Then, these properties together with a KKM Fan lemma are used to study the existence of solutions to the underlying problems. Finally, sufficient conditions for the Zolezzi wellposedness for the reference problems are provided.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán cân bằng vector ở hai dạng yếu và mạnh được nghiên cứu theo nón thứ tự có phần trong đại số khác rỗng. Trước hết, các cấu trúc giải tích trong không gian tuyến tính cũng như một số tính chất của chúng được khảo sát. Sau đó, các tính chất này được sử dụng để thiết lập các điều kiện đủ cho tập nghiệm của các bài toán cân bằng vector không là tập rỗng. Tiếp theo, các điều kiện đủ cho sự đặt chỉnh Zolezzi cho các bài toán đang xét cũng được thiết lập.

1. GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng vector là một mô hình chứa rất nhiều bài toán quan trọng trong tối ưu hóa, chẳng hạn như bài toán tối ưu vector, bài toán bất đẳng thức biến phân vector, bài toán điểm yên ngựa vector, bài toán về điểm bất động, bài toán bù và bài toán cân bằng Nash vector (Ansari et al., 2000; Oettli, 1997; Bianchi et al., 1997). Trong hơn hai thập kỷ qua, các chủ đề quan trọng của lớp bài toán cân bằng vector đã được nghiên cứu một cách rộng rãi. Tương tự như các lớp mô hình toán học khác, chủ đề quan trọng hàng đầu của lớp bài toán cân bằng vector vẫn là sự tồn tại nghiệm. Đến nay, nhiều công trình nghiên cứu về chủ đề này được công bố trên các tạp chí quốc tế có uy tín (Ansari et al., 2001; Ansari, 2008; Bigi et al., 2012; Chen et al., 2005; Gong, 2006; Huang et al., 2007). Tính ổn định nghiệm (theo hai nghĩa định tính và định lượng) là chủ đề quan trọng tiếp theo ngay sau chủ đề tồn tại nghiệm. Đây là chủ đề mới nhưng phát triển rất nhanh trong thời gian gần đây (Anh et al., 2018, 2019, 2020, 2021; Tam, 2021).

Sự đặt chỉnh của bài toán cân bằng vector rất gần với chủ đề về tính ổn định nghiệm. Sự đặt chỉnh của một bài toán có thể hiểu theo hai hướng chính. Thứ nhất là sự đặt chỉnh theo nghĩa Hadamard đã được đề xuất trong Hadamard (1902). Theo hướng này, một bài toán được gọi là đặt chỉnh Hadamard nếu nó có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất đó phụ thuộc liên tục vào dữ liệu của bài toán. Hướng thứ hai là khái niệm đặt chỉnh do nhà toán học Tykhonov đề xuất trong Tykhonov (1966) và thường được biết với tên gọi đặt chỉnh Tykhonov. Trong đó, bài toán được gọi là đặt chỉnh Tykhonov nếu nó có nghiệm duy nhất, và đồng thời mọi dãy nghiệm xấp xỉ đều hội tụ đến nghiệm duy nhất này. Về sau, các nhà toán học đã đề xuất rất nhiều khái niệm mở rộng của hai dạng đặt chỉnh ở trên, trong số đó dạng đặt chỉnh theo tham số nhiễu (còn được gọi là đặt chỉnh Zolezzi), là sự kết hợp hai dạng đặt chỉnh Hadamard và Tykhonov lại với nhau, được giới thiệu trong Zolezzi (1995). Đây là dạng được rất nhiều nhà toán học quan tâm và khảo sát rộng rãi cho nhiều mô hình toán học.

Mục tiêu của bài báo là nghiên cứu sự tồn tại và tính đặt chỉnh nghiệm Zolezzi cho bài toán cân bằng vector ở hai dạng yếu và mạnh theo nón thứ tự có phần trong đại số khác rỗng. Một cách cụ thể, trước hết, các khái niệm giải tích của hàm và tập được cho trong không gian tuyến tính không được trang bị cấu trúc topo được giới thiệu và nghiên cứu. Sau đó, chúng được sử dụng để thiết lập các điều kiện đủ cho tính khác rỗng của tập nghiệm của bài toán đang xét. Kế tiếp, các dạng nghiệm xấp xỉ và các dạng đặt chỉnh theo tham số nhiễu của các bài toán này được đề xuất. Cuối cùng, bằng việc sử dụng các khái niệm và tính chất giải tích trong không gian tuyến tính vừa nêu, các điều kiện đặt chỉnh vừa được đề xuất cho các bài toán cân bằng vector yếu và mạnh trong không gian tuyến tính được nghiên cứu.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong phần này, xét Y là một không gian tuyến tính thực và Ω là một tập con khác rỗng của Y. Nhắc lại rằng, tập Ω được gọi là một tập lồi nếu với mọi $x, y \in \Omega$ và $t \in [0,1]$ thì

$$tx + (1-t)y \in \Omega.$$

Định nghĩa 2.1 (Jahn, 2009, Định nghĩa 1.8, Tr. 6-7)

a) *Phần trong đại số* của tập Ω, kí hiệu là $\mathrm{core}(\Omega)$, là một tập hợp được xác định như sau:

$$\mathrm{core}(\Omega) \coloneqq \{a \in \Omega: \forall v \in Y, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } a + [0,\delta]v \subset \Omega\}.$$

Tập Ω thỏa mãn điều kiện $\mathrm{core}(\Omega) = \Omega$ được gọi là một *tập mở đại số*.

b) *Bao đóng đại số* của tập Ω, kí hiệu là $\mathrm{lin}(\Omega)$, là một tập hợp được xác định như sau:

$$\mathrm{lin}(\Omega) \coloneqq \{\bar{y} \in Y: \exists y \in \Omega, y \neq \bar{y}, \alpha y + (1-\alpha)\,\bar{y} \in \Omega, \alpha \in (0,1]\} \cup \Omega.$$

Tập Ω thỏa mãn điều kiện $\mathrm{lin}(\Omega) = \Omega$ được gọi là một *tập đóng đại số*.

Bổ đề 2.1

Nếu Ω là một tập đóng đại số trong Y thì với mọi $x \in Y \setminus \Omega$ và $v \in \Omega$, tồn tại $t_0 \in (0,1)$ sao cho $x + t(v-x) \notin \Omega$ với mọi $t \le t_0$.

Chứng minh

Vì $x \notin \Omega = \mathrm{lin}\,(\Omega)$ nên với mọi $v \in \Omega$, ta có $[v,x) \not\subset \Omega$, tức là,

$$\{tv + (1-t)x \mid t \in (0,1]\} \not\subset \Omega.$$

Điều này dẫn đến sự tồn tại $t_0 \in (0,1)$ thỏa mãn $t_0 v + (1-t_0)x \notin \Omega$. Do đó, với mọi $t \le t_0$ ta có $tv + (1-t)x \notin \Omega$ hay $x + t(v-x) \notin \Omega$. ■

Bổ đề 2.2

Nếu Ω là một tập đóng đại số trong Y thì $Y \setminus \Omega$ là một tập mở đại số trong Y.

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh bao hàm thức $Y \setminus \Omega \subset \mathrm{core}\,(Y \setminus \Omega)$ vì hiển nhiên ta có bao hàm thức $\mathrm{core}(Y \setminus \Omega) \subset Y \setminus \Omega$. Lấy bất kỳ $x \in Y \setminus \Omega$ và $w \in Y$, ta cần chứng tỏ rằng tồn tại $\lambda > 0$ sao cho

$$x + [0,\lambda]w \subset Y \setminus \Omega.$$

Đặt $v := x + w$, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $[x,v] \cap \Omega = \emptyset$, tức là $[x, x+w] \subset Y \setminus \Omega$, thì ta được

$$x + [0,\lambda]w \subset Y \setminus \Omega,$$

với $\lambda = 1$ do $[x, x+w] = x + [0,1]w$.

Trường hợp 2: Nếu $[x,v] \cap \Omega \neq \emptyset$ thì ta lấy $\bar{v} \in [x, x+w] \cap \Omega$. Khi đó tồn tại $\bar{t} \in [0,1]$ sao cho

$$\bar{v} = \bar{t}x + (1-\bar{t})(x+w).$$

Vì $\bar{v} \in \Omega$ nên theo Bổ đề 2.1 thì tồn tại $t_0 \in (0,1)$ sao cho $x + t(\bar{v} - x) \notin \Omega$ với mọi $t \le t_0$. Do đó, $x + t[\bar{t}x + (1-\bar{t})x + (1-\bar{t})w - x] \notin \Omega$,

$\forall t \le t_0$.

Suy ra $x + t(1-\bar{t})w \notin \Omega$ với mọi $t \le t_0$. Do đó, ta được $x + [0,\lambda]w \subset Y \setminus \Omega$ với $\lambda = t_0(1-\bar{t})$.

Vậy, $\mathrm{core}\,(Y \setminus \Omega) = Y \setminus \Omega$. ■

Bổ đề 2.3 (Tâm, 2021, Mệnh đề 2.4, 2.6 & 2.8)

Giả sử Ω là tập con trong Y. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:

$\operatorname{core}(\Omega)$ là một tập mở đại số.

a) Nếu Ω là một tập lồi thì $\operatorname{core}(\Omega)$ là một tập lồi.

b) Nếu Ω là một tập lồi và mở đại số trong Y thì với bất kỳ tập A ⊂ Y, ta có đẳng thức:

$$\operatorname{core}(A+\Omega) = A + \Omega.$$

Định nghĩa 2.2

Cho C là một tập con của Y. Khi đó:

a) C được gọi là nón nếu $\lambda x \in C$ với mọi $x \in C$ và $\lambda \geq 0$.

b) Nón C được gọi là có đỉnh nếu $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$, ở đây $\mathbf{0}_Y$ là vector không trong Y.

c) Nón C được gọi là nón lồi nếu C là một tập lồi.

Bổ đề 2.4 (Jahn, 2009, Bổ đề 1.11 & 1.12, Tr. 9-10)

Nón C là lồi trong Y nếu và chỉ nếu $C + C \subset C$.

Nếu C là một nón lồi trong Y và $\operatorname{core}(C)$ khác rỗng thì $\operatorname{core}(C) + C = \operatorname{core}(C)$.

Nếu C là một nón lồi thì $b + \operatorname{core}(C)$ là một tập mở đại số trong Y.

Trong phần cuối của mục này, các khái niệm, tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của một ánh xạ nhận giá trị trong một không gian tuyến tính không có cấu trúc topo được nghiên cứu.

Cho X là một không gian vector topo Hausdorff, và Y là một không gian tuyến tính thực được sắp thứ tự bởi nón C.

Định nghĩa 2.3

Cho $h: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector. Ánh xạ h được gọi là:

a) C-nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi tập V mở đại số trong Y thỏa mãn $h(x_0) \in V$ thì tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $h(x) \in V - C$ với mọi $x \in U$.

b) C-nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi tập V mở đại số trong Y thỏa mãn $h(x_0) \in V$ thì tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $h(x) \in V + C$ với mọi $x \in U$.

c) C-liên tục tại $x_0 \in X$ nếu nó vừa C-nửa liên tục trên và C-nửa liên tục dưới tại x_0.

C-nửa liên tục trên (C-nửa liên tục dưới, C-liên tục) trên một tập nào đó của X nếu nó là C-nửa liên tục trên (C-nửa liên tục dưới, C-liên tục) tại mọi điểm thuộc tập đó.

Sau đây, các đặc trưng của các tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ h được nghiên cứu.

Định lý 2.1

i) Ánh xạ $h: X \to Y$ là C-nửa liên tục trên trên X khi và chỉ khi với mọi $b \in Y$, tập nghịch ảnh $h^{-1}(b - \operatorname{core}(C))$ là một tập mở trong X.

ii) Ánh xạ $h: X \to Y$ là C-nửa liên tục dưới trên X khi và chỉ khi với mọi $b \in Y$, tập nghịch ảnh $h^{-1}(b + \operatorname{core}(C))$ là một tập mở trong X.

Chứng minh

i) Xem chứng minh trong Tâm, 2021, Định lý 2.1.

ii) Giả sử ánh xạ h là C-nửa liên tục dưới trên X. Với mọi $b \in Y$ và $x_0 \in h^{-1}(b + \operatorname{core}(C))$ thì ta suy ra $h(x_0) \in b + \operatorname{core}(C)$. Vì h là C-nửa liên tục dưới và $b + \operatorname{core}(C)$ là một tập mở đại số nên tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho

$$h(x) \in b + \operatorname{core}(C) + C, \forall\, x \in U.$$

Vì $\operatorname{core}(C) + C = \operatorname{core}(C)$ nên ta suy ra $h(x) \in b + \operatorname{core}(C)$ với mọi $x \in U$. Do đó, $x \in h^{-1}(b + \operatorname{core}(C))$ với mọi $x \in U$. Suy ra $x_0 \in U \subset h^{-1}(b + \operatorname{core}(C))$. Do đó $h^{-1}(b + \operatorname{core}(C))$ là một tập mở trong X.

Bây giờ ta sẽ chứng minh chiều ngược lại. Giả sử $h^{-1}\big(b + \operatorname{core}(C)\big)$ là một tập mở trong X với mọi $b \in Y$, ta chứng minh rằng h là C-nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x_0 \in X$. Thật vậy, giả sử V là một tập mở đại số bất kỳ trong Y thoả mãn $h(x_0) \in V$ và e là một vector bất kỳ thuộc $\operatorname{core}(C)$. Khi đó tồn tại $\lambda > 0$ sao cho $h(x_0) + \frac{\lambda}{2} e \in V$. Ta dễ dàng thấy rằng $x_0 \in h^{-1}\left(h(x_0) + \frac{\lambda}{2} e + \operatorname{core}(C)\right)$,

và $h^{-1}\left(h(x_0) + \frac{\lambda}{2} e + \operatorname{core}(C)\right)$ là một tập mở nên tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho

$$x_0 \in U \subset h^{-1}\left(h(x_0) + \frac{\lambda}{2} e + \operatorname{core}(C)\right),$$

hay với mọi $x \in U$ thì

$$x \in h^{-1}\left(h(x_0) + \frac{\lambda}{2} e + \operatorname{core}(C)\right).$$

Do đó

$h(x) \in h(x_0) + \frac{\lambda}{2}e + \text{core}(C) \subset V + C, \forall\, x \in U.$

Vậy h là C-nửa liên tục dưới tại x_0.

Do đó, chứng minh được hoàn tất. ■

Cho Z là một không gian vector topo Hausdorff và $h_1: X \to Y, h_2: Z \to Y$ là các ánh xạ có giá trị vector. Ta xét ánh xạ tổng $h_1 + h_2: X \times Z \to Y$ được xác định như sau:

$$(h_1 + h_2)(x, z) := h_1(x) + h_2(z), \forall (x, z) \in X \times Z.$$

Định lý 2.2

Các khẳng định sau đây là đúng:

i) Nếu h_1 và h_2 là C-nửa liên tục trên tương ứng tại x_0 và z_0 thì $h_1 + h_2$ là C- nửa liên tục trên tại (x_0, z_0).

ii) Nếu h_1 và h_2 là C-nửa liên tục dưới tương ứng tại x_0 và z_0 thì $h_1 + h_2$ là C-nửa liên tục dưới tại (x_0, z_0).

Chứng minh:

Do kỹ thuật chứng minh tương tự nên ta chỉ trình bày phần chứng minh của (ii).

Giả sử rằng V là một tập mở đại số thỏa mãn $h_1(x_0) + h_2(z_0) \in V$. Do đó, $-h_1(x_0) - h_2(z_0) + V$ là một tập mở đại số chứa 0_Y. Khi đó, tồn tại hai tập mở đại số V_1, V_2 chứa 0_Y thỏa mãn

$$V_1 + V_2 \subset -h_1(x_0) - h_2(z_0) + V.$$

Vì $h_1(x_0) + V_1$ là một tập mở đại số chứa $h_1(x_0)$ và h_1 là C-nửa liên tục dưới tại x_0 nên tồn tại một lân cận U_1 của x_0 sao cho với mọi $x \in U_1$ thì $h_1(x) \in h_1(x_0) + V_1 + C$,

Tương tự, tồn tại một lân cận U_2 của z_0 sao cho với mọi $z \in U_2$, $h_2(z) \in h_2(z_0) + V_2 + C$,

Do đó, với mọi $(x, z) \in U_1 \times U_2$, ta có

$$h_1(x) + h_2(z) \in h_1(x_0) + h_2(z_0) + V_1 + V_2 + C + C \subset V + C.$$

Vậy $h_1 + h_2$ là C-nửa liên tục dưới tại (x_0, z_0). ■

Bằng cách chứng minh tương tự như trong Định lý 2.2, ta có kết quả sau.

Định lý 2.3

Cho $h: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector và r là một số thực dương. Nếu h là C-nửa liên tục trên (tương ứng, C-nửa liên tục dưới) tại x_0 thì rh là C-nửa liên tục trên (tương ứng, C-nửa liên tục dưới) tại x_0.

3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTOR YẾU VÀ MẠNH

Trong mục này, ta xét X là một không gian vector topo Hausdorff; Y là một không gian tuyến tính thực; C là một nón lồi, đóng đại số và có đỉnh trong Y với $\text{core}(C)$ là khác rỗng. Cho K là một tập con khác rỗng của X và $f: K \times K \longrightarrow Y$ là một song hàm. Ta xét các bài toán cân bằng vector yếu (kí hiệu, WEP) và mạnh (kí hiệu, SEP) sau đây:

(WEP) Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho

$f(\bar{x}, y) \notin -\text{core}(C)$ với mọi $y \in K$.

(SEP) Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho

$f(\bar{x}, y) \in C$ với mọi $y \in K$.

Ký hiệu các tập nghiệm của (WEP) và (SEP) lần lượt là S^w và S^s, tức là:

$S^w := \{x \in K: f(x, y) \notin -\text{core}(C), \forall\, y \in K\};$

$S^s := \{x \in K: f(x, y) \in C, \forall\, y \in K\}.$

Để nghiên cứu tính khác rỗng của các tập nghiệm S^w và S^s, trước hết ta nhắc lại khái niệm ánh xạ KKM và nguyên lý điểm bất động KKM-Fan.

Định nghĩa 3.1 (Ansari, 2000, Định nghĩa 3, Tr. 3)

Cho G là một tập con khác rỗng của X và một ánh xạ đa trị $F: G \rightrightarrows X$. Ánh xạ F được gọi là một ánh xạ KKM nếu với mọi tập con hữu hạn $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ của G thì bao hàm thức

$$\text{conv}\,\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(y_i),$$

được thỏa mãn, ở đây $\text{conv}(E)$ là kí hiệu bao lồi của tập con E.

Bổ đề sau thường được gọi là Bổ đề KKM-Fan.

Bổ đề 3.1 (Fan, 1961, Bổ đề 1)

Giả sử rằng $F: G \rightrightarrows X$ là một ánh xạ KKM có giá trị đóng. Khi đó, nếu tồn tại ít nhất một phần tử $\bar{y} \in G$ sao cho $F(\bar{y})$ là tập compact thì

$$\bigcap_{y \in G} F(y) \neq \emptyset.$$

Trong bài báo Tâm (2021), các tác giả đã đưa ra các điều kiện đủ đảm bảo sự tồn tại nghiệm của bài toán (WEP) như sau:

Định lý 3.1

Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) với mọi $x \in K, f(x, x) \notin -\text{core}(C)$;

(ii) với mọi $x \in K$, tập hợp $\{y \in K: f(x,y) \in -\mathrm{core}(C)\}$ là một tập lồi;

(iii) với mọi $y \in K, f(\cdot, y)$ là C-nửa liên tục trên trong K;

(iv) (điều kiện bức) tồn tại một tập compact khác rỗng N của K và $\bar{y} \in N$ sao cho $f(x,\bar{y}) \in -\mathrm{core}(C)$ với mọi $x \in K \backslash N$.

Khi đó, tập nghiệm của bài toán S^w của bài toán (WEP) là khác rỗng.

Bây giờ, ta thiết lập kết quả về các điều kiện đảm bảo tính khác rỗng của tập nghiệm S^s của bài toán (SEP).

Định lý 3.2

Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) với mọi $x \in K, f(x,x) \in C$;

(ii) với mọi $x \in K$, tập $\{y \in K: f(x,y) \notin C\}$ là một tập lồi;

(iii) với mọi $y \in K$, $f(\cdot, y)$ là C-nửa liên tục trên trong K;

(iv) (điều kiện bức) tồn tại một tập compact khác rỗng N của K và $\bar{y} \in N$ sao cho $f(x,\bar{y}) \notin C$ với mọi $x \in K \backslash N$.

Khi đó, tập nghiệm S^s của bài toán (SEP) là khác rỗng.

Chứng minh:

Xét ánh xạ đa trị $F: K \rightrightarrows K$ được xác định bởi,

$$F(y) := \{x \in K: f(x,y) \in C\},$$

với mọi $y \in K$.

Ta nhận xét rằng, $\bar{x} \in S^s$ khi và chỉ khi

$$\bar{x} \in \bigcap_{y \in K} F(y).$$

Trước hết, ta chứng minh F là một ánh xạ KKM. Giả sử ngược lại, F không là ánh xạ KKM. Khi đó, tồn tại một tập con hữu hạn của $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ của K và một phần tử $y \in \mathrm{conv}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ nhưng $y \notin F(y_i)$ với mọi i. Do đó, $f(y, y_i) \notin C$ với mọi i. Vì $y \in \mathrm{conv}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ nên y có thể được viết dưới dạng

$$y = \sum_{i=1}^{n} t_i y_i\,,\ t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

Kết hợp điều kiện $f(y, y_i) \notin C$ với mọi i và giả thiết (ii), ta suy ra

$$f\left(y, \sum_{i=1}^{n} t_i y_i\right) \notin C,$$

hay $f(y,y) \notin C$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (i), và do đó, F là một ánh xạ KKM.

Kế tiếp, ta chứng minh $F(y)$ là một tập con đóng của K với mọi $y \in K$. Giả sử $\{x_\alpha\}$ là một lưới bất kỳ trong $F(y)$ hội tụ về x_0. Nếu $x_0 \notin F(y)$ thì $f(x_0, y) \notin C$, hay $f(x_0, y) \in Y \backslash C$.

Vì $Y \backslash C$ là một tập mở đại số và f là C-nửa liên tục trên nên ta suy ra tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $f(x,y) \in Y \backslash C - C \subset Y \backslash C, \forall x \in U$.

Vì U là một lân cận của x_0 và $x_\alpha \to x_0$ nên tồn tại α_0 sao cho $x_\alpha \in U$ với $\alpha \geq \alpha_0$. Khi đó $f(x_\alpha, y) \in C$, đây là điều mâu thuẫn vì $x_\alpha \in F(y)$. Do đó, $x_0 \in F(y)$ và ta suy ra $F(y)$ là một tập đóng trong K.

Với mỗi $\bar{x} \in F(\bar{y})$ bất kỳ thì ta có $f(\bar{x}, \bar{y}) \in C$. Theo giả thiết (iv) thì $\bar{x} \notin K \backslash N$ hay $\bar{x} \in N$. Do đó, $F(\bar{y}) \subset N$. Hơn nữa, theo chứng minh trên thì $F(\bar{y})$ là một tập đóng. Vì $F(\bar{y})$ là một tập con đóng trong tập compact N nên $F(\bar{y})$ cũng là một tập compact.

Như vậy, ta đã chứng minh được F là một ánh xạ KKM với giá trị đóng và có $F(\bar{y})$ là một tập compact trong K. Áp dụng của bổ đề KKM-Fan, ta được $\bigcap_{y \in K} F(y) \neq \emptyset$.

Vậy tập nghiệm S^s là khác rỗng. ■

Ví dụ: Cho $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $C = [0\,; +\infty)$, $K = N = [0\,; 1]$. Xét ánh xạ $f: K \times K \longrightarrow Y$ được xác định $f(x,y) = x - y,\ \forall x, y \in K$. Khi đó các điều kiện của Định lý 3.2 đều thỏa mãn và $x = 1$ là nghiệm của bài toán (SEP).

4. SỰ ĐẶT CHỈNH ZOLEZZI

Trong phần này, ta xét X là không gian định chuẩn; Y là một không gian tuyến tính thực; A là tập con của X, và Λ là tập con không rỗng của không gian định chuẩn P (không gian tham số); C là một nón lồi, đóng đại số và có đỉnh trong Y với $\mathrm{core}(C)$ là khác rỗng. Cho $K: \Lambda \rightrightarrows A$ là một ánh xạ đa trị và $f: A \times A \times \Lambda \to Y$ là một hàm vecto. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, ta xét các bài toán cân bằng vector yếu và mạnh phụ thuộc tham số sau đây:

(PWVEP) Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho $f(\bar{x}, y, \lambda) \notin -\mathrm{core}(C)$ với mọi $y \in K(\lambda)$.

(PSVEP) Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho

$f(\bar{x}, y, \lambda) \in C$ với mọi $y \in K(\lambda)$.

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, $e \in \text{core}(C)$ và $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, ta ký hiệu các tập nghiệm xấp xỉ của (PWVEP) và (PSVEP) lần lượt như sau:

$$\Pi^w(\lambda, \varepsilon) := \{x \in K(\lambda): f(x, y, \lambda) + \varepsilon e \notin -\text{core}(C), \forall y \in K(\lambda)\}.$$

$$\Pi^s(\lambda, \varepsilon) := \{x \in K(\lambda): f(x, y, \lambda) + \varepsilon e \in C, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Định nghĩa 4.1

Cho $\bar{\lambda} \in \Lambda$, $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ là một dãy hội tụ về $\bar{\lambda}$. Một dãy $\{x_n\}$ với $x_n \in K(\lambda_n)$ được gọi là dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán (PWVEP) (tương ứng, (PSVEP)) tại $\bar{\lambda}$ ứng với dãy $\{\lambda_n\}$, nếu tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+$ hội tụ về 0 sao cho

$$f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e \notin -\text{core}(C), \forall y \in K(\lambda)$$

(tương ứng, $f(x_n, y, \lambda_n) + \varepsilon_n e \in C, \forall y \in K(\lambda)$).

Định nghĩa 4.2

Bài toán (PWVEP) (tương ứng, (PSVEP)) được gọi là đặt chỉnh Zolezzi tại $\bar{\lambda}$ nếu:

a) Tập nghiệm $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ (tương ứng, $\Pi^s(\bar{\lambda}, 0)$) là khác rỗng,

b) mọi dãy nghiệm xấp xỉ của (PWVEP) (tương ứng, (PSVEP)) tại $\bar{\lambda}$ ứng với dãy $\{\lambda_n\}$ đều có một dãy con hội tụ về một phần tử nào đó trong $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ (tương ứng, $\Pi^s(\bar{\lambda}, 0)$).

Bài toán được gọi là đặt chỉnh Zolezzi nếu nó đặt chỉnh tại mọi điểm trong Λ.

Định nghĩa 4.3

Bài toán (PWVEP) (tương ứng, (PSVEP)) được gọi là đặt chỉnh Zolezzi duy nhất nếu:

a) Bài toán (PWVEP) (tương ứng, (PSVEP)) có nghiệm duy nhất $\bar{x}$,

b) mọi dãy nghiệm xấp xỉ của (PWVEP) (tương ứng, (PSVEP)) tại $\bar{\lambda}$ ứng với dãy $\{\lambda_n\}$ đều hội tụ về $\bar{x}$.

Bài toán được gọi là đặt chỉnh Zolezzi duy nhất nếu nó đặt chỉnh duy nhất tại mọi điểm trong Λ.

Sau đây, ta nhắc lại các khái niệm về tính nửa liên tục và liên tục cùng với một số tính chất quan trọng của một ánh xạ đa trị.

Định nghĩa 4.4 (Aubin & Frankowska, 1990, Định nghĩa 1.4.1 & 1.4.2, Tr. 38) Cho ánh xạ đa trị $Q: \Lambda \rightrightarrows X$ và $\lambda_0 \in \Lambda$. Khi đó:

a) Q được gọi là nửa liên tục trên tại λ_0 nếu với mọi lân cận U của $Q(\lambda_0)$ thì tồn tại một lân cận N của λ_0 sao cho $Q(\lambda) \subset U$ với mọi $\lambda \in U$.

b) Q được gọi là nửa liên tục dưới tại λ_0 nếu cho mọi lưới $\{\lambda_\alpha\}$ hội tụ về λ_0 và mọi $x_0 \in Q(\lambda_0)$ thì tồn tại một lưới $\{x_\alpha\}$ trong $Q(\lambda_\alpha)$ thỏa mãn $x_\alpha \to x_0$.

c) Q được gọi là liên tục tại λ_0 nếu Q vừa nửa liên tục trên vừa nửa liên tục dưới tại λ_0.

Ta nói rằng ánh xạ Q là nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới, liên tục) trên một tập con nào đó nếu nó là nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới, liên tục) tại mọi điểm trên tập con đó.

Bổ đề 4.1 (Hu & Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.19, Tr. 41)

Cho $Q(\lambda_0)$ là một tập compact. Khi đó, Q là nửa liên tục trên tại λ_0 nếu và chỉ nếu với bất kỳ lưới $\{\lambda_\alpha\}$ hội tụ về λ_0 và $x_\alpha \in Q(\lambda_\alpha)$ thì tồn tại một lưới con $\{x_\beta\}$ của $\{x_\alpha\}$ hội tụ về một điểm x_0 nào đó thuộc $Q(\lambda_0)$.

Bổ đề 4.2 (Hu & Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.6, Tr. 37)

Ánh xạ đa trị $Q: \Lambda \rightrightarrows X$ là nửa liên tục dưới tại λ_0 nếu cho mọi lưới $\{\lambda_\alpha\}$ hội tụ về λ_0 thì $Q(\lambda_0) \subset \liminf Q(\lambda_\alpha)$, với

$$\liminf Q(\lambda_\alpha) := \{x_0 \in X: \exists x_\alpha \in Q(\lambda_\alpha), x_\alpha \to x_0\}.$$

Kết quả về tính đặt chỉnh Zolezzi tham số của bài toán (PWVEP) được phát biểu trong kết quả sau đây.

Định lý 4.1

Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) K là liên tục và có giá trị compact trong Λ;

(ii) với mọi $x \in K(\Lambda), f(x, x, \lambda) \notin -\text{core}(C)$;

(iii) với mọi $x \in K(\Lambda)$, tập hợp $\{y \in K(\Lambda): f(x, y, \lambda) \in -\text{core}(C)\}$ là một tập lồi;

(iv) với mọi $y \in K(\Lambda)$, $f(\cdot, y, \lambda)$ là C-nửa liên tục trên trong $K(\Lambda)$;

Khi đó, bài toán (PWVEP) là đặt chỉnh Zolezzi. Hơn nữa, nếu tập nghiệm của bài toán (PWVEP) là tập đơn phần tử thì bài toán (PWVEP) là đặt chỉnh Zolezzi duy nhất.

Chứng minh

Ta thấy rằng các giả thiết của Định lý 3.1 đều được thỏa mãn. Do đó, tập nghiệm $S(\lambda) = \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ của bài toán (PWVEP) là khác rỗng.

Bây giờ ta sẽ chứng minh ánh xạ nghiệm xấp xỉ Π^W là nửa liên tục trên tại $(\bar{\lambda}, 0)$. Giả sử Π^W không là nửa liên tục trên tại $(\bar{\lambda}, 0)$, tức là, tồn tại một tập mở U chứa $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$, một dãy $\{\lambda_n, \varepsilon_n\} \subset \Lambda \times \mathbb{R}_+$ hội tụ về $(\bar{\lambda}, 0)$, một dãy $\{x_n\}$ với $x_n \in \Pi(\lambda_n, \varepsilon_n)$ sao cho $x_n \notin U$ với mọi n.

Từ tính nửa liên tục trên của K tại $\bar{\lambda}$ và tính compact của $K(\bar{\lambda})$, ta có thể giả sử rằng $x_n \to x_0$ với $x_0 \in K(\bar{\lambda})$. Nếu $x_0 \notin \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ thì ta có thể tìm được $y_0 \in K(\bar{\lambda})$ sao cho

$$f(x_0, y_0, \bar{\lambda}) \in -\mathrm{core}(C).$$

Vì K là nửa liên tục dưới nên tồn tại $y_n \in K(\lambda_n)$ thỏa mãn $y_n \to y_0$. Vì $x_n \in \Pi^W(\lambda_n, \varepsilon_n)$ và $y_n \in K(\lambda_n)$ nên

$$f(x_n, y_n, \lambda_n) + \varepsilon_n e \notin -\mathrm{core}(C).$$

Xét ánh xạ đồng nhất $i: C \to C$, theo các Định lý 2.2 và 2.3 ta suy ra tính C-nửa liên tục trên của ánh xạ $(x, y, \lambda, \varepsilon) \mapsto f(x, y, \lambda) + \varepsilon e$ tại $(x_0, z_0, \bar{\lambda}, 0)$.

Áp dụng Định lý 2.1, ta được $f(x_0, z_0, \bar{\lambda}) \notin -\mathrm{core}(C)$. Đây là một điều mâu thuẫn. Do đó, $x_0 \in \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$, và đây lại là một điều vô lý vì $x_n \notin U$ với mọi n.

Vậy Π^W là nửa liên tục trên tại $(\bar{\lambda}, 0)$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ là compact bằng cách chỉ ra tính đóng của nó trong tập compact $K(\bar{\lambda})$. Giả sử $x_n \in \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ bất kỳ thỏa mãn $x_n \to x_0$. Nếu $x_0 \notin \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ thì tồn tại $y_0 \in K(\bar{\lambda})$ sao cho $f(x_0, y_0, \bar{\lambda}) \in -\mathrm{core}(C)$.

Sử dụng tính nửa liên tục dưới của K, ta tìm được $y_n \in K(\lambda_n)$ thỏa mãn $y_n \to y_0$.

Do $x_n \in \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ và $y_n \in K(\lambda_n)$ nên

$$f(x_n, y_n, \bar{\lambda}) \notin -\mathrm{core}(C).$$

Áp dụng tính nửa liên tục trên của f ta được

$$f(x_0, y_0, \bar{\lambda}) \notin -\mathrm{core}(C).$$

Đây là một điều mâu thuẫn. Do đó, $x_0 \in \Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$, dẫn đến $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ là tập đóng.

Với $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ là một dãy bất kỳ dần về $\bar{\lambda}$ và $\{x_n\}$ là một dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán (PWVEP) ứng với $\{\lambda_n\}$. Vì Π^W là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại $\Pi(\bar{\lambda}, 0)$ nên áp dụng Bổ đề 4.1, ta suy ra tồn tại một dãy con của $\{x_n\}$ dần về một điểm nào đó thuộc $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$. Do đó, bài toán (PWVEP) đặt chỉnh Zolezzi. Đặc biệt, nếu $\Pi^w(\bar{\lambda}, 0)$ là một tập đơn phần tử thì bài toán (PWVEP) là đặt chỉnh Zolezzi duy
nhất. ∎

Đối với bài toán (PSVEP), ta có kết quả sau đây. Ở đây ta không trình bày chứng minh vì nó tương tự như chứng minh cho bài toán (PWVEP).

Định lý 4.2

Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) K là liên tục và có giá trị compact trong Λ;

(ii) với mọi $x \in K(\Lambda), f(x, x, \lambda) \in C$;

(iii) với mọi $x \in K(\Lambda)$, tập $\{y \in K(\Lambda): f(x, y, \lambda) \notin C\}$ là một tập lồi;

(iv) với mọi $y \in K(\Lambda)$, $f(\cdot, y, \lambda)$ là C-nửa liên tục trên trong $K(\Lambda)$;

Khi đó bài toán (PSVEP) là đặt chỉnh Zolezzi. Hơn nữa, nếu tập nghiệm của bài toán (PSVEP) là tập đơn phần tử thì bài toán (PSVEP) là đặt chỉnh Zolezzi duy nhất.

Ví dụ: Cho $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $C = [0\,; +\infty)$, $A = \Lambda = [0\,; 1]$. Xét ánh xạ $K: \Lambda \rightrightarrows A, f: A \times A \times \Lambda \to Y$ được xác định bởi $K(\lambda) = [0; 1], f(x, y, \lambda) = x - y^2 + \lambda,\ \forall x, y \in K(\lambda)$. Khi đó các điều kiện của các Định lý 4.1 và 4.2 đều thỏa mãn, và do đó các bài toán (PWVEP) và (PSVEP) là đặt chỉnh Zolezzi.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, sự tồn tại nghiệm và đặt chỉnh Zolezzi của bài toán cân bằng vector ở hai dạng yếu và mạnh theo nón thứ tự có phần trong đại số khác rỗng được nghiên cứu. Trước hết, các điều kiện đủ cho các bài toán có nghiệm đã được thiết lập dựa vào bổ đề KKM-Fan cùng các điều kiện khác. Sau đó, sự đặt chỉnh Zolezzi của các bài toán này cũng được đề xuất và khảo sát. Các công cụ, kỹ thuật và cách tiếp cận được đề xuất trong bài báo này có nhiều khả năng áp dụng nghiên cứu các tính chất nghiệm của nhiều mô hình tối ưu được cho trong không gian tuyến tính không được trang bị cấu trúc topo, thí dụ như bài toán tối ưu hàm mục tiêu có giá trị tập, bài toán bao hàm biến phân, bài toán quan hệ biến phân.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo là một phần kết quả đạt được trong đề tài "Nghiên cứu các tính chất tôpô của hàm và tập trong không gian tuyến tính", được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Đô, mã số: 06.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2018). On Hölder continuity of solution maps to parametric vector primal and dual equilibrium problems. *Optimization*. *67*(8), 1169-1182. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1466298

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2020). On the stability of approximate solutions to set-valued equilibrium problems. *Optimization. 69*(7-8), 1583-1599. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1646744

Anh, L. Q., Duoc, P. T., Tam, T. N., & Thang, N. C. (2021). Stability analysis for set-valued equilibrium problems with applications to Browder variational inclusions. *Optimization Letters*. *15*(2), 613-626. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1646744

Anh, L. Q., Khanh, P. Q., & Tam, T. N. (2019). Continuity of approximate solution maps of primal and dual vector equilibrium problems. *Optimization Letters*. *13*(1), 201-211. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1264-8

Ansari, Q. H., Schaible, S., & Yao, J. C. (2000). System of vector equilibrium problems and its applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *107*(3), 547-557. https://doi.org/10.1023/A:1026495115191

Ansari, Q. H., Konnov, I. V., & Yao, J. C. (2001). Existence of a solution and variational principles for vector equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications. 110*(3), 481-492. https://doi.org/10.1023/A:1026495115191

Ansari, Q. H. (2008). Existence of solutions of systems of generalized implicit vector quasiequilibrium problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications. 341*(2), 1271-1283. https://doi.org/10.1023/A:1026495115191

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis. Birkhäuser. *Boston*, 474 pages.

Bigi, G., Adela, C., & Kassay, G. (2012). Existence results for strong vector equilibrium problems and their applications. *Optimization. 61*(5), 567-583. https://doi.org/10.1023/A:1026495115191

Bianchi, M., Hadjisavvas, N., & Schaible, S. (1997). Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions. *Journal of optimization Theory and Applications*, *92*(3), 527-542. https://doi.org/10.1023/A:1022603406244

Chen, G. Y., Huang, X. X., & Yang, X. Q. (2005). Vector Optimization: Set-Valued and Variational Analysis. Springer. *Berlin*, 318 pages.

Fan, K. (1961). A generalization of Tychonoff's fixed point theorem. *Mathematische Annalen*. *142*(3), 305-310. https://doi.org/10.1007/BF01353421

Giannessi, F. (Ed.). (2013). *Vector variational inequalities and vector equilibria: mathematical theories* (Vol. 38). Springer Science & Business Media.

Gong, X. H. (2006). Strong vector equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*. *36*(3), 339-349. https://doi.org/10.1007/s10898-006-9012-5

Hadamard, J. (1902). Sur le problèmes aux dérivees partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin, 49-52.

Hu, S., & Papageorgiou, N. (1997). Handbook of Multivalued Analysis, *Volume I: Theory. Kluwer. Boston*, 968 pages. https://doi.org/10.1007/s10898-006-9012-5

Huang, N. J., Li, J., & Yao, J. C. (2007). Gap functions and existence of solutions to a system of vector equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*. *133*(2), 201-212. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9202-4

Jahn, J. (2009). Vector Optimization. *Berlin: Springer*, 392 pages.

Oettli, W. (1997). A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity. *Acta Mathematica Vietnamica, 22*(1), 213-221. http://journals.math.ac.vn/acta/pdf/9701213.pdf

Tam, T. N. (2022). On Hölder continuity of solution maps to parametric vector Ky Fan inequalities. *TOP*. *30*(1), 77-94. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9202-4

Tâm, T. N., Anh, H. N. H., Anh, T. T. K., Nhật, D.M., & Thy, N. N. M. (2021). Sự tồn tại và tính nửa liên tục trên của nghiệm bài toán cân bằng vector theo nón thứ tự có phần trong đại số khác rỗng. *Tạp chí khoa học trường Đại học Cần Thơ*. *57*(5A), 86-93. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.145

Tykhonov, A. N. (1966). On the stability of the functional optimization problem. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics *6(4)*, 28-33. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.145

Zolezzi, T. (1995). Well-posedness criteria in optimization with application to the calculus of variations. Nonlinear Analysis. 25(5), 437-453. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)00142-5