Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.146

CÁC LOẠI ĐẶT CHỈNH CỦA BÀI TOÁN QUY HOẠCH HAI MỨC

Nguyễn Thị Ngọc Như[1*] và Phạm Thanh Dược[2]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thị Ngọc Như (email: nhum0720009@gstudent.ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 13/02/2022
Ngày nhận bài sửa: 09/05/2022
Ngày duyệt đăng: 01/06/2022

Title:
Kinds of well-posedness of bilevel optimization programmings

Từ khóa:
Bài toán quy hoạch hai mức, bài toán tối ưu hai mức, nghiệm xấp xỉ, sự đặt chỉnh

Keywords:
Approximate solutions, bilevel mathematical programming, bilevel optimization problem, well-posedness

ABSTRACT

This paper investigates bilevel optimization problems and their well-posedness. First, many kinds of approximate solutions to such problems are defined, and then based on these approximate solutions, various kinds of well-posedness for the underlying problems are introduced. By using conditions related to the continuity properties of multivariable functions, sufficient conditions for the relationship between the mentioned well-posedness properties are formulated. Many examples are given to illustrate the obtained results.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán quy hoạch hai mức và tính chất đặt chỉnh của chúng được tập trung nghiên cứu. Trước hết, các dạng xấp xỉ nghiệm của bài toán đang xét được xây dựng và từ đó, các khái niệm đặt chỉnh theo nhiều nghĩa khác nhau của lớp bài toán này cũng được đề xuất. Bằng việc sử dụng các điều kiện liên quan đến tính liên tục của hàm nhiều biến, điều kiện đủ cho các mối quan hệ của các loại đặt chỉnh đã được đề xuất ở trên được thiết lập. Một số ví dụ minh họa cho kết quả nghiên cứu cũng được đưa ra.

1. GIỚI THIỆU

Tối ưu hóa là sự lựa chọn một phương án tốt nhất (đối với một số tiêu chí) từ tập hợp các lựa chọn chấp nhận được đã có. Bài toán tối ưu đóng vai trò quan trọng trong việc giải quyết các vấn đề thực tiễn của hầu hết các lĩnh vực trong cuộc sống như khoa học máy tính, kỹ thuật, y học, sinh học, kinh tế, thiết kế và vấn đề đưa ra quyết định trong việc quản lý nhiều lĩnh vực khác nhau (John et al., 2004; Khan et al., 2016; Kassay et al., 2018). Chính vì vậy, lý thuyết tối ưu luôn được xem là lĩnh vực quan trọng hàng đầu của toán học trong việc đáp ứng các nhu cầu của cuộc sống. Ngược lại, những tình huống thực tế của đời sống lao động sản xuất là nguồn động lực vô tận đã thúc đẩy sự phát triển liên tục của lý thuyết tối ưu trong hơn một thế kỉ qua. Từ sự phát triển của xã hội, nhiều mô hình tối ưu hóa cũng được đề xuất và nghiên cứu như các bài toán tối ưu hóa đa mục tiêu (Pardalos et al., 2017), bài toán tối ưu với dữ liệu không chắc chắn (Jiang et al., 2021), tối ưu hóa toàn cục (Hansen et al., 2003), tối ưu hóa trong không gian vô hạn chiều (Chen et al., 2006), tối ưu hóa tổ hợp (Grötschel et al., 2012), tối ưu hóa ngẫu nhiên (Marti et al., 2005), … Những mô hình tối ưu hóa này được các nhà toán học trên thế giới không ngừng phát triển và ứng dụng mạnh mẽ trong rất nhiều lĩnh vực (Lignola et al., 1997; Ye et al., 2010).

Trong những năm gần đây, bài toán tối ưu đã được rất nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm nghiên cứu về lý thuyết lẫn việc triển khai dãy số cho nhiều tình huống thuộc các lĩnh vực khoa học, công nghệ, kinh tế, xã hội. Bạn đọc có thể tìm hiểu ở một số nghiên cứu điển hình như Dempe et al., (2006), Dempe et al. (2018), Sinha et al. (2017), Li et al. (2022), Mehlitz et al. (2021). Tuy đối với bài toán quy hoạch hai mức, các nghiên cứu tập trung vào điều kiện tối ưu, tính ổn định của nghiệm nhưng các kết quả nghiên cứu chủ đề đặt chỉnh đối với lớp bài toán này còn hạn chế chưa tương xứng với vai trò và tầm quan trọng của nó.

Lấy cảm hứng của các công trình nghiên cứu các dạng nghiệm xấp xỉ, trong bài báo này, một số loại đặt chỉnh của bài toán quy hoạch hai mức được tập trung xem xét đồng thời mối liên kết của các dạng đặt chỉnh trên nền bài toán quy hoạch hai mức cũng được giải thích.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ là các không gian định chuẩn, một phép tương ứng $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là một ánh xạ đa trị hay ánh xạ giá trị tập nếu với mỗi $x \in \mathbb{X}$ được cho tương ứng với duy nhất một tập con trong $\mathbb{Y}$ được kí hiệu bởi $G(x)$.

Định nghĩa 2.1. (Göpfert et al., 2003, Định nghĩa 2.5.1, tr. 51) Ánh xạ đa trị $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là:

(a) nửa liên tục trên (usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu bất kỳ lân cận $\mathcal{V}$ của $G(x_0)$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $G(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$;

(b) nửa liên tục dưới (lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu bất kỳ tập mở $\mathcal{V}$ của $\mathbb{Y}$ với $G(x_0) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $G(x) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ với mọi $x \in \mathcal{U}$;

(c) liên tục tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó là usc và lsc tại x_0.

Nhận xét 2.1.

(a) Nếu ánh xạ G không nửa liên tục trên tại $x_0 \in \mathbb{X}$, khi đó tồn tại một lân cận $\mathcal{V}_0$ của $G(x_0)$ sao cho với mỗi lân cận $\mathcal{U}_n$ của x_0, ta được $x_n \in \mathcal{U}_n$ thỏa mãn $G(x_n) \cap (\mathbb{Y} \backslash \mathcal{V}_0) \neq \emptyset$, hoặc tương đương tồn tại một dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0 sao cho với mỗi n, ta có $z_n \in G(x_n) \backslash \mathcal{V}_0$.

(b) Nếu ánh xạ G không nửa liên tục dưới tại $x_0 \in \mathbb{X}$, khi đó một tập con mở $\mathcal{V}_0$ trong $\mathbb{Y}$ thoả mãn $G(x_0) \cap \mathcal{V}_0 \neq \emptyset$ và với mỗi lân cận $\mathcal{U}_n$ của x_0, tồn tại $x_n \in \mathcal{U}_n$ thỏa $G(x_n) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset$, hoặc tương đương tồn tại một z_0 thuộc $G(x_0)$ và một dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0 sao cho bất kỳ dãy $\{z_n\}$, $z_n \in G(x_n)$ không hội tụ đến z_0.

Bổ đề 2.1. (Hu & Papageorgiou, 1997, Mệnh đề 2.19, tr. 41) Nếu $G(x_0)$ là tập compact, khi đó G là usc tại x_0 nếu và chỉ nếu với dãy bất kỳ $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và $y_n \in G(x_n)$, tồn tại dãy $\{y_{n_k}\}$ hội tụ về $y_0 \in G(x_0)$.

Định nghĩa 2.2. (Bourbaki et al., 2013, Định nghĩa 1, tr. 360) Hàm $f: \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ được gọi là nửa liên tục dưới (hoặc nửa liên tục trên) tại một điểm $a \in \mathbb{X}$, nếu với mỗi $h < f(a)$ (hoặc mỗi $k > f(a)$), tồn tại một lân cận $\mathcal{V}$ của a sao cho $h < f(x)$ (hoặc $k > f(x)$) với mỗi $x \in \mathcal{V}$. Một hàm giá trị thực được gọi là nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên) trên $\mathbb{X}$ nếu nó liên tục dưới (liên tục trên) tại mọi điểm của $\mathbb{X}$.

Bây giờ, xem xét bài toán tối ưu hai mức có thứ bậc của hai hoặc nhiều người chơi. Trước tiên, với mỗi $x \in X$, xét bài toán tối ưu

$$\min_y \{f(x,y): y \in Y\}, \qquad \text{(OP)}$$

trong đó $X \subset \mathbb{R}^m \backslash \{\emptyset\}, Y \subset \mathbb{R}^n \backslash \{\emptyset\}$ và ánh xạ $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Đây là bài toán của người đưa ra quyết định mức dưới. Ký hiệu

$$\varphi(x) := \min_y \{f(x,y): y \in Y\}$$

là giá trị tối ưu của bài toán (OP) khi Y là một tập đóng, khác rỗng.

Ánh xạ $\psi: X \to \mathbb{R}^n$ được xác định bởi

$$\forall x \in X, \psi(x) := \{y \in Y: f(x,y) \le \varphi(x)\}$$

là ánh xạ nghiệm của bài toán (OP) và đồ thị của nó được ký hiệu bởi

$$\text{graph}\, \psi := \{(x,y): x \in X, y \in \psi(x)\}.$$

Cho ánh xạ $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Xét bài toán tối ưu hai mức:

$$\min_x \{F(x,y): (x,y) \in \text{graph}\, \psi, x \in X\}. \quad \text{(BOP)}$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán (BOP) là $\text{Eff}\,(F,f,X,Y)$.

Ví dụ 2.1. Cho $X = Y = [-2;2]$ và $F, f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2,$$

$$f(x,y) = x^3 - y^3.$$

$$\text{Tại } x = a \Rightarrow \min_{y \in Y} f(a,y) = a^3 - 8 = \varphi(a)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x^3 - 8 \Rightarrow \psi(x) = \{2\}.$$

$$\operatorname{graph}\psi = \{(x,2): x \in [-2;2]\}.$$

Khi đó,

$$\min_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) = \min_{x\in X}(x-2)^2 + 1 = 1.$$

Vậy, Eff $(F,f,X,Y) = \{(2,2)\}$.

3. CÁC DẠNG ĐẶT CHỈNH CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN QUY HOẠCH HAI MỨC

Phần này đề xuất các khái niệm đặt chỉnh cho bài toán (BOP) dựa trên các khái niệm đặt chỉnh đã được nghiên cứu đối với bài toán tối ưu (Miglierina et al., 2005).

Cho ánh xạ đa trị $Q: \mathbb{R}^+ \rightrightarrows \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ được xác định bởi với mọi $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,

$$Q(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{r} (x,y) \in X\times Y: f(x,y) \le \varphi(x) + \varepsilon, \\ F(x,y) \le \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Các tính chất của $Q(\varepsilon)$ sẽ được trình bày ngay sau đây:

Mệnh đề 3.1. Từ định nghĩa có thể suy ra trực tiếp

(a) $Q(\varepsilon)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}^+$, tức là,

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon_2 \Rightarrow Q(\varepsilon_1) \subset Q(\varepsilon_2), \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$$

(b) $Q(0) = \bigcap_{\varepsilon>0} Q(\varepsilon)$.

Mệnh đề 3.2. Lấy $\varepsilon \in \mathbb{R}^+, X, Y$ là các tập con khác rỗng của $\mathbb{R}^m$ và $\mathbb{R}^n$.

(i) f là liên tục trên $X \times Y$;

(ii) F là nửa liên tục dưới trên $X \times Y$.

Khi đó, $Q(\varepsilon)$ là tập đóng. Hơn nữa, nếu $X \times Y$ là compact thì $Q(\varepsilon)$ là compact.

Chứng minh

Theo định nghĩa, ta có

$$Q(\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{r} (x,y) \in X\times Y: f(x,y) \le \varphi(x) + \varepsilon, \\ F(x,y) \le \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon \end{array} \right\}$$

Lấy $(x_n, y_n) \in Q(\varepsilon)$. Giả sử rằng $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. Khi đó,

$$\begin{cases} f(x_n,y_n) \le \varphi(x_n) + \varepsilon \\ F(x_n,y_n) \le \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_n,y_n) \le f(x_n,y) + \varepsilon, \forall y \in Y \\ F(x_n,y_n) \le F(x,y) + \varepsilon, \forall x \in X, y \in \psi(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_n,y_n) - f(x_n,y) \le \varepsilon, \forall y \in Y \\ F(x_n,y_n) \le F(x,y) + \varepsilon, \forall x \in X, y \in \psi(x) \end{cases}$$

Điều này kết hợp với tính liên tục của f và nửa liên tục dưới của F suy ra

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_0,y_0) - f(x_0,y) \le \varepsilon, \forall y \in Y \\ F(x_0,y_0) \le F(x,y) + \varepsilon, \forall x \in X, y \in \psi(x) \end{cases}$$

Do đó,

$$\begin{cases} f(x_0,y_0) \le \varphi(x_0) + \varepsilon \\ F(x_0,y_0) \le \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon \end{cases}$$

Hay $(x_0, y_0) \in Q(\varepsilon)$, tương đương $Q(\varepsilon)$ là đóng.

Hơn nữa, $X \times Y$ là tập con compact của $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ nên $Q(\varepsilon)$ cũng là compact. ■

Mệnh đề 3.3. Với $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ cho trước. Giả sử rằng

(i) X và Y là các tập lồi;

(ii) F là tựa lồi trên $X \times Y$, tức là với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tập hợp

$$lev_{\le\alpha}F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: F(x,y) \le \alpha\} \quad (1)$$

là một tập lồi.

(iii) f là affine trên $X \times Y$, tức là với mọi $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$ và $t \in [0;1]$ ta luôn có

$$f\big((1-t)(x_1,y_1) + t(x_2,y_2)\big) = (1-t)f(x_1,y_1) + tf(x_2,y_2) \quad (2)$$

Khi đó, $Q(\varepsilon)$ là tập lồi.

Chứng minh

Lấy $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in Q(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x_1,y_1) \le \varphi(x_1) + \varepsilon & (3) \\ F(x_1,y_1) \le \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon & (4) \\ f(x_2,y_2) \le \varphi(x_2) + \varepsilon & (5) \\ F(x_2,y_2) \le \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon & (6) \end{cases}$$

Từ (1), (4) và (6) suy ra

$$F\big((1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)\big) \leq \min_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y)+\varepsilon \quad (7)$$

Từ (2), (3) và (5) suy ra

$$f\big((1-t)(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)\big)$$

$$=(1-t)f(x_1,y_1)+tf(x_2,y_2)$$

$$\leq (1-\mathrm{t})\varphi(x_1)+\mathrm{t}\varphi(x_2)+\varepsilon$$

$$\leq (1-t)f(x_1,y)+tf(x_2,y)+\varepsilon, \forall y\in Y$$

$$=f\big((1-t)(x_1,y)\big)+f\big(t(x_2,y)\big)+\varepsilon, \forall y\in Y. \blacksquare$$

Định nghĩa 3.4. Bài toán (BOP) được gọi là B-đặt chỉnh khi và chỉ khi Q là nửa liên tục trên tại $\varepsilon=0$.

Định nghĩa 3.5. Một dãy $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ được gọi là dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán (BOP), nếu tồn tại $\varepsilon_n>0$ và $\varepsilon_n\to 0$ sao cho

$$\begin{cases} f(x_n,y_n)\leq \varphi(x_n)+\varepsilon_n, \\ F(x_n,y_n)\leq \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y)+\varepsilon_n. \end{cases}$$

Định nghĩa 3.6. Bài toán (BOP) được gọi là H-đặt chỉnh nếu với mọi dãy $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ với $(x_n,y_n)\to(\bar{x},\bar{y})\in \mathrm{Eff}\,(F,f,X,Y)$ thì

$$F(x_n,y_n)\to \min_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y).$$

Định nghĩa 3.7. Bài toán (BOP) được gọi là DH-đặt chỉnh nếu

$$\inf_{\varepsilon>0} \mathrm{diam}\, Q(\varepsilon)=0,$$

trong đó, $diam(A)=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$ với A là tập con khác rỗng.

Định nghĩa 3.8. Bài toán (BOP) được gọi là L-đặt chỉnh nếu mọi dãy nghiệm xấp xỉ đều trích được dãy con hội tụ về một phần tử trong tập nghiệm Eff (F,f,X,Y).

Ví dụ 3.1. Cho X,Y,F,f được xác định như Ví dụ 2.1. Khi đó, tập nghiệm xấp xỉ được xác định bởi

$$Q(\varepsilon)=\left\{\begin{matrix}(x,y)\in X\times Y: f(x,y)\leq\varphi(x)+\varepsilon, \\ F(x,y)\leq \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y)+\varepsilon\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{matrix}(x,y)\in X\times Y: x^3-y^3\leq x^3-8+\varepsilon \\ (x-2)^2+(y-1)^2\leq 1+\varepsilon\end{matrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{matrix}(x,y)\in X\times Y: y\geq\sqrt[3]{8-\varepsilon} \\ (x-2)^2+(y-1)^2\leq 1+\varepsilon\end{matrix}\right\}.$$

Rõ ràng $Q(\varepsilon)$ là compact, nên có thể áp dụng Bổ đề 2.1 để chứng minh tính nửa liên tục trên của Q như sau. Lấy $\{\varepsilon_n\}\subset\mathbb{R}^+$ tùy ý và hội tụ về 0, với mỗi dãy $\{(x_n,y_n)\}$, $(x_n,y_n)\in Q(\varepsilon_n)$, cần chứng minh dãy $\{(x_n,y_n)\}$ sẽ có dãy con hội tụ về phần tử của $Q(0)=\{(2,2)\}$.

Vì $\varepsilon_n\to 0$ nên tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho, với mọi $n\geq n_0$ được

$$\begin{cases} \sqrt[3]{8-\varepsilon_n}\leq y_n\leq 2, & (3.1) \\ \left(\sqrt[3]{8-\varepsilon_n}-1\right)^2\leq (x_n-2)^2+(y_n-1)^2 & \\ \qquad\leq 1+\varepsilon_n. & (3.2)\end{cases}$$

Từ (3.1) suy ra $\lim y_n=2$.

Theo định lý kẹp (3.2) dẫn đến

$$\lim\left((x_n-2)^2+(y_n-1)^2\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \lim(x_n-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \lim x_n=2.$$

Suy ra, $\{(x_n,y_n)\}\to(2,2)\in Q(0)$.

Vậy bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh.

* Với $F(x_n,y_n)=(x_n-2)^2+(y_n-1)^2$

$$(x_n,y_n)\to(\bar{x},\bar{y})=(2,2)$$

$$F(x_n,y_n)\to(2-2)^2+(2-1)^2=1$$

và

$$\min_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y)=1.$$

Vậy (BOP) là H-đặt chỉnh.

* Với mọi $(x,y)\in Q(\varepsilon)$,

$$\begin{cases} y\geq\sqrt[3]{8-\varepsilon} \\ (x-2)^2+(y-1)^2\leq 1+\varepsilon\end{cases}$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2\leq 1+\varepsilon-(y-1)^2+(y-2)^2$$

$$=1+\varepsilon-2y+3$$

$$\leq 4+\varepsilon-2\sqrt[3]{8-\varepsilon}$$

$$= \varepsilon + 2(2 - \sqrt[3]{8-\varepsilon})$$

$$= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4+2\sqrt[3]{8-\varepsilon}+\left(\sqrt[3]{8-\varepsilon}\right)^2}$$

$$\leq 3\varepsilon.$$

Với $z_1 = (x_1, y_1) \in Q(\varepsilon), z_2 = (x_2, y_2) \in Q(\varepsilon)$

$\Rightarrow \|z_1 - z_2\| \leq 2\sqrt{3\varepsilon} \to 0$, khi $\varepsilon \to 0$.

Hay $\|z_1 - z_2\| \to 0$ khi $\varepsilon \to 0$.

Tức là,

$$\inf_{\varepsilon>0} \text{diam}\, Q(\varepsilon) = 0\,.$$

Vậy bài toán (BOP) là DH-đặt chỉnh.

Phần còn lại của mục này, nghiên cứu mối quan hệ giữa các loại đặt chỉnh của bài toán (BOP) và các đặc trưng của chúng.

Định lý 3.9. Bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh khi và chỉ khi mọi dãy nghiệm xấp xỉ $\{(x_n, y_n)\} \subset (X \times Y) \setminus$ Eff (F, f, X, Y) đều trích được dãy con $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ thỏa mãn (x_{n_k}, y_{n_k}) hội tụ về một phần tử $(\bar{x}, \bar{y}) \in$ Eff (F, f, X, Y).

Chứng minh

(Điều kiện cần) Giả sử bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh nhưng tồn tại một dãy nghiệm xấp xỉ $\{(x_n, y_n)\}$ trong $(X \times Y) \setminus$Eff (F, f, X, Y) và dãy này không trích được dãy con hội tụ về bất kì phần tử nào trong Eff (F, f, X, Y). Bây giờ sẽ chứng minh rằng với mọi lân cận mở W của Eff (F, f, X, Y) và với mọi n_k sẽ tồn tại $n \geq n_k$ sao cho thỏa mãn $(x_n, y_n) \notin W$. Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu Eff (F, f, X, Y) là tập mở thì $W =$Eff (F, f, X, Y).

Trường hợp 2: Nếu Eff (F, f, X, Y) là tập đóng thì với mỗi n, tồn tại một vài số $\delta_n > 0$ sao cho $W_n =$ Eff $(F, f, X, Y) + \delta_n \mathbb{B}$, trong đó $\mathbb{B}$ là quả cầu đơn vị mở trong không gian tích $X \times Y$ vì $(x_n, y_n) \notin$ Eff (F, f, X, Y) với mọi n.

Mặt khác, $Q(0) =$ Eff (F, f, X, Y) và tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ với $\varepsilon_n \to 0$ sao cho với mọi n thì $(x_n, y_n) \in Q(\varepsilon_n)$ nên Q là không usc tại 0 (xem Nhận xét 2.1). Điều này vô lý vì (BOP) là B-đặt chỉnh hay Q là usc tại $\varepsilon = 0$.

(Điều kiện đủ) Giả sử (BOP) không là B-đặt chỉnh. Khi đó, tồn tại một tập mở $W \subset X \times Y$ thoả mãn Eff $(F, f, X, Y) = Q(0) \subset W$ và một dãy $\{\varepsilon_n\} \subset R^+, \varepsilon_n \to 0$ sao cho với mỗi n tồn tại

$$(x_n, y_n) \in Q(\varepsilon_n) \setminus W.$$

Từ sự xác định của ánh xạ Q suy ra dãy $\{(x_n, y_n)\}$ là một dãy nghiệm xấp xỉ ứng với $\{\varepsilon_n\}$. Mặt khác vì Eff $(F, f, X, Y) \subset W$ nên có $\{(x_n, y_n)\}$ là một dãy nghiệm xấp xỉ thỏa mãn điều kiện $\{(x_n, y_n)\} \subset (X \times Y) \setminus$Eff (F, f, X, Y). Áp dụng giả thiết suy ra tồn tại một dãy con $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ của $\{(x_n, y_n)\}$ sao cho $(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (\bar{x}, \bar{y}) \in$Eff$(F, f, X, Y) \subset W$.Điều này mâu thuẫn vì $(x_n, y_n) \notin W$ với mọi n. ■

Định lý 3.10. Nếu bài toán (BOP) là L-đặt chỉnh thì nó cũng là B-đặt chỉnh.

Chứng minh

Trước hết, nếu bài toán (BOP) là L-đặt chỉnh thì tập nghiệm Eff (F, f, X, Y) là compact. Thật vậy, giả sử $\{(x_n, y_n)\} \subset$ Eff (F, f, X, Y), theo Định nghĩa 3.2 thì $\{(x_n, y_n)\}$ cũng là một dãy nghiệm xấp xỉ và do đó từ sự L-đặt chỉnh nó sẽ có dãy con hội tụ về một phần tử trong Eff (F, f, X, Y). Do tính tùy ý của dãy $\{(x_n, y_n)\}$ suy ra tập nghiệm Eff (F, f, X, Y) là compact.

Tiếp theo, ta cần chứng minh rằng Q là nửa liên tục trên tại $\varepsilon = 0$. Lấy dãy bất kỳ $\{\varepsilon_n\}$ hội tụ về 0 và $(x_n, y_n) \in Q(\varepsilon_n)$. Từ sự xác định của ánh xạ Q, có

$$f(x_n, y_n) \leq \varphi(x_n) + \varepsilon_n,$$

$$F(x_n, y_n) \leq \min_{\substack{x\in X \\ y\in\psi(x)}} F(x_n, y_n) + \varepsilon_n.$$

Do đó, $\{(x_n, y_n)\}$ là một dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán (BOP). Theo Định nghĩa 3.5, luôn tìm được một dãy con $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ hội tụ về $(x_0, y_0) \in$ Eff $(F, f, X, Y) = Q(0)$. Nghĩa là,$(x_0, y_0) \in Q(0)$. Vậy Q là nửa liên tục trên tại $\varepsilon = 0$ và do đó bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh. ■

Định lý 3.11. Giả sử rằng X, Y là các tập compact và

(i) bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh;

(ii) f, F là nửa liên tục dưới trên $X \times Y$;

(iii) với mỗi $y \in Y$, $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên trên X.

Khi đó, (BOP) là L-đặt chỉnh.

Chứng minh

Bước 1. Chỉ ra rằng hàm

$$\varphi(x) = min\{f(x, y): y \in Y\}$$

là nửa liên tục trên.

Lấy dãy $\{x_n\} \subset X$ với $x_n \to x_0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Giả sử rằng $\varphi(x_n) \geq \alpha$, tức là

$$min\{f(x_n, y): y \in Y\} \geq \alpha.$$

Suy ra, với mọi $y \in Y$ thì $f(x_n, y) \geq \alpha$. Kết hợp điều này với tính chất nửa liên tục trên của $f(\cdot, y)$ dẫn đến

$$\forall y \in Y, f(x_0, y) \geq \alpha.$$

Tương đương,

$$min\{f(x_0, y): y \in Y\} \geq \alpha.$$

Hay $\varphi(x_0) \geq \alpha$. Do đó, φ là nửa liên tục trên tại x_0 bất kỳ trong X. Vậy φ là nửa liên tục trên trên X.

Bước 2. Chứng minh rằng Eff (F, f, X, Y) là tập compact.

Lấy dãy $\{(x_n, y_n)\} \subset$ Eff (F, f, X, Y) với (x_n, y_n) hội tụ về $(\bar{x}, \bar{y})$.

Vì $(x_n, y_n) \in$ Eff (F, f, X, Y) nên

$$f(x_n, y_n) - \varphi(x_n) \leq 0, \tag{3.3}$$

$$F(x_n, y_n) \leq \min_{\substack{x \in X \\ y \in \psi(x)}} F(x, y). \tag{3.4}$$

Từ kết quả Bước 1, (ii) và (3.3)

$$f(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}) \leq 0. \tag{3.5}$$

Từ (3.4), tính chất nửa liên tục dưới của F kéo theo

$$F(\bar{x}, \bar{y}) \leq \min_{\substack{x \in X \\ y \in \psi(x)}} F(x, y). \tag{3.6}$$

Kết hợp (3.5) và (3.6) suy ra

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Eff } (F, f, X, Y).$$

Do đó, Eff (F, f, X, Y) là một tập con đóng của tập $X \times Y$. Điều này kết hợp với tính compact của $X \times Y$ kéo theo rằng Eff (F, f, X, Y) là một compact.

Bước 3. Vì bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh nên Q là nửa liên tục trên tại $\varepsilon = 0$. Hơn nữa, có $Q(0) =$ Eff (F, f, X, Y) là tập compact. Với mỗi dãy nghiệm xấp xỉ $\{(x_n, y_n)\}$ của bài toán (BOP), luôn tìm được $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ với $\varepsilon_n \to 0$ sao cho

$$f(x_n, y_n) \leq \varphi(x_n) + \varepsilon_n,$$

$$F(x_n, y_n) \leq \min_{\substack{x \in X \\ y \in \psi(x)}} F(x_n, y_n) + \varepsilon_n.$$

Do đó, $(x_n, y_n) \in Q(\varepsilon_n)$ với mọi n. Áp dụng Bổ đề 2.1, kết luận rằng dãy (x_n, y_n) sẽ có dãy con hội tụ về một phần tử nào đó trong Eff (F, f, X, Y). Nói cách khác, bài toán (BOP) là L-đặt chỉnh. ■

Định lý 3.12. Nếu bài toán (BOP) là DH-đặt chỉnh thì nó cũng là L-đặt chỉnh.

Chứng minh

Giả sử phản chứng rằng bài toán (BOP) không là L-đặt chỉnh, tức là tồn tại $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times Y$ là một dãy nghiệm xấp xỉ nhưng nó không hội tụ về bất kỳ phần tử nào trong Eff (F, f, X, Y).

Vì $\{(x_n, y_n)\}$ là dãy nghiệm xấp xỉ nên tồn tại $\varepsilon_n > 0$ và $\varepsilon_n \to 0$ sao cho

$$\begin{cases} f(x_n, y_n) \leq \varphi(x_n) + \varepsilon_n, \\ F(x_n, y_n) \leq \min\limits_{\substack{x \in X \\ y \in \psi(x)}} F(x, y) + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Khi đó,

$$(x_n, y_n) \in Q(\varepsilon_n), \forall n.$$

Lấy $(\bar{x}, \bar{y}) \in$ Eff (F, f, X, Y) bất kỳ, vì không có dãy con nào của dãy $\{(x_n, y_n)\}$ không hội tụ về $(\bar{x}, \bar{y})$ nên tồn tại $\gamma > 0$ và một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$ luôn có

$$(x_n, y_n) \notin (\bar{x}, \bar{y}) + \gamma\mathbb{B},$$

trong đó $\mathbb{B}$ là quả cầu đơn vị mở trong $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, và điều này dẫn đến $d\big((x_n, y_n), (\bar{x}, \bar{y})\big) \geq \gamma$. Mặt khác, vì Eff $(F, f, X, Y) \subset Q(\varepsilon_n)$ với mọi n, nên suy ra

$$\inf_{\varepsilon > 0} \text{diam } Q(\varepsilon) \geq \inf_n \text{diam } Q(\varepsilon_n) \geq \gamma > 0.$$

Điều này vô lý vì bài toán (BOP) là DH-đặt chỉnh. ■

Sơ đồ mối liên hệ giữa các loại đặt chỉnh

$$\begin{array}{ccc} \textbf{\textit{L}}\text{-}\textbf{đặt chỉnh} & \Leftarrow & \textbf{\textit{DH}}\text{-}\textbf{đặt chỉnh} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \textbf{\textit{B}}\text{-}\textbf{đặt chỉnh} & & \textbf{\textit{H}}\text{-}\textbf{đặt chỉnh} \end{array}$$

Các ví dụ sau đây chỉ ra các chiều ngược lại của sơ đồ trên nói chung là không đúng.

Ví dụ 3.2. Cho $X = Y = \mathbb{R}$ và $F, f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F(x,y) = 1.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y < 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}.$$

Khi đó,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \min_{y\in\mathbb{R}}\{f(x,y)\} = 0.$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \{y \in Y | f(x,y) \leq \varphi(x)\} \\ &= \{y \in Y | f(x,y) \leq 0\} \\ &= [0; +\infty). \end{aligned}$$

Khi đó,

$$Q(\varepsilon) = \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in X \times Y: f(x,y) \leq \varphi(x) + \varepsilon, \\ F(x,y) \leq \min\limits_{\substack{x\in X \\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon \end{matrix} \right\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times Y: f(x,y) \leq 0 + \varepsilon\}$$

$$= \mathbb{R} \times [0, +\infty),$$

với mọi ε. Nên $Q(\varepsilon)$ là nửa liên tục trên tại $\varepsilon = 0$.

Vậy bài toán (BOP) là B-đặt chỉnh.

Chọn $\{(n,n)\} \in Q(\varepsilon)$ mà $\{(n,n)\}$ không có dãy con hội tụ.

Vậy bài toán (BOP) không là L-đặt chỉnh.

Ví dụ 3.3. Cho $X = [-1; 1], Y = [0; 1]$ và $F, f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F(x,y) = \begin{cases} e^{|x|}, & |y| \leq 1 \\ -x + 1, & |y| > 1 \end{cases}.$$

$$f(x,y) = e^x + |y^2 - y|.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \min_{y\in[0;1]} f(x,y) \\ &= \min_{y\in[0;1]} e^x + |y^2 - y| \\ &= e^x, \end{aligned}$$

tại $y = 0, y = 1$.

Suy ra,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \{y \in Y: f(x,y) \leq \varphi(x)\} \\ &= \{y \in Y: |y^2 - y| \leq 0\} \\ &= \{0; 1\}, \end{aligned}$$

với mọi $x \in [-1,1]$.

Khi đó, ánh xạ đa trị $Q: \mathbb{R}^+ \rightrightarrows \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$Q(\varepsilon) = \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in X \times Y: f(x,y) \leq \varphi(x) + \varepsilon, \\ F(x,y) \leq \min\limits_{\substack{x\in X \\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in X \times Y: |y^2 - y| \leq \varepsilon \\ e^{|x|} \leq \min\limits_{\substack{x\in[-1;1] \\ y\in\{0;1\}}} F(x,y) + \varepsilon \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in X \times Y: |y^2 - y| \leq \varepsilon \\ e^{|x|} \leq \min\limits_{x\in[-1;1]} e^{|x|} + \varepsilon \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in X \times Y: |y^2 - y| \leq \varepsilon \\ e^{|x|} \leq 1 + \varepsilon \end{matrix} \right\}.$$

Suy ra,

$$Q(0) = \left\{ \begin{matrix} y \in \{0; 1\} \\ x = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \{(0; 0), (0; 1)\}$$

Rõ ràng, $Q(0) \subset Q(\varepsilon)$

Lấy $\{(x_n, y_n)\} \in Q(\varepsilon)$ là dãy nghiệm xấp xỉ của bài toán với $\varepsilon_n > 0$ và $\varepsilon_n \to 0$ sao cho

$$\begin{cases} e^{x_n} + |y_n^2 - y_n| \leq e^{x_n} + \varepsilon_n, \\ e^{|x_n|} \leq \min\limits_{x\in[-1;1]} e^{|x|} + \varepsilon_n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |y_n^2 - y_n| \leq \varepsilon_n, \\ e^{|x_n|} \leq 1 + \varepsilon_n \end{cases}.$$

Khi $\varepsilon_n \to 0$, ta được $\begin{cases} |y_n^2 - y_n| \to 0, \\ e^{|x_n|} \to 1 \end{cases}$

Luôn chọn được dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ sao cho

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} y_{n_k} \to 0 \\ y_{n_k} \to 1 \end{matrix} \right. \\ x_{n_k} \to 0 \end{cases}$$

Do đó,

$$\left[\begin{array}{l}(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (0;0) \in Q(0)\\(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (0;1) \in Q(0).\end{array}\right.$$

Vậy bài toán (BOP) là L-đặt chỉnh.

Với $z_1 = (0;0) \in Q(0), z_2 = (0;1) \in Q(0)$,

$$\Rightarrow \|z_1 - z_2\| = 1$$

Nên,

$$\inf_{\varepsilon>0} \operatorname{diam} Q(\varepsilon) \neq 0\,.$$

Vậy bài toán (BOP) không là DH-đặt chỉnh.

Ví dụ 3.4. Cho $X = [0;1]$, $Y = [-1;1]$ và $F, f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F(x,y) = -1 - |y|$$

$$f(x,y) = (1-y^2)e^x.$$

Khi đó,

$$\varphi(x) = \min_{y\in[-1;1]} f(x,y) = \min_{y\in[-1;1]} (1-y^2)e^x = 0,$$

tại $y = 1, y = -1$.

Suy ra,

$$\psi(x) = \{y \in Y: f(x,y) \leq \varphi(x)\}$$

$$= \{y \in Y: (1-y^2)e^x \leq 0\}$$

$$= \{-1;1\},$$

với mọi $x \in [0;1]$.

Và

$$\min_{\substack{x\in[0;1]\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) = \min_{\substack{x\in[0;1]\\ y\in\{-1;1\}}} (-1-|y|) = -2.$$

Khi đó, với mọi $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ánh xạ đa trị Q được xác định

$$Q(\varepsilon) = \left\{\begin{array}{r}(x,y) \in X\times Y: f(x,y) \leq \varphi(x) + \varepsilon,\\ F(x,y) \leq \min\limits_{\substack{x\in X\\ y\in\psi(x)}} F(x,y) + \varepsilon\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{r}(x,y) \in X\times Y: f(x,y) \leq \varepsilon,\\ F(x,y) \leq -2+\varepsilon\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{r}(x,y) \in X\times Y: (1-y^2)e^x \leq \varepsilon,\\ -1-|y| \leq -2+\varepsilon\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{r}(x,y) \in X\times Y: (1-y^2)e^x \leq \varepsilon,\\ |y| \geq 1-\varepsilon\end{array}\right\}$$

Suy ra,

$$Q(0) = [0;1] \times \{-1;1\}.$$

Rõ ràng,

$$Q(0) \subset Q(\varepsilon).$$

Điều này cho phép chọn $z_1 = (0;-1)$ và $z_2 = (0;1)$ là hai phần tử nằm trong $Q(\varepsilon)$ với mọi $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ và

$$\|z_1 - z_2\| = 2$$

Tức là,

$$\inf_{\varepsilon>0} \operatorname{diam} Q(\varepsilon) \neq 0\,.$$

Vậy bài toán (BOP) không là DH-đặt chỉnh. Nhưng nó là H-đặt chỉnh. Thật vậy, lấy dãy

$\{(x_n, y_n)\} \in [0;1] \times [-1;1]$ sao cho $\{(x_n, y_n)\} \to (x_0, y_0) \in Eff\,(F, f, X, Y)$.

Tức là,

$$\{(x_n, y_n)\} \to (x_0, y_0) \in [0;1] \times \{-1;1\}.$$

Kéo theo,

$$\{|y_n|\} \to 1.$$

Do đó,

$$F(x_n, y_n) = -1 - |y_n| \to -2 = \min_{\substack{x\in[0;1]\\ y\in\{-1;1\}}} F(x,y).$$

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các loại đặt chỉnh của bài toán quy hoạch hai mức được giới thiệu và mối quan hệ giữa chúng đã được nghiên cứu. Các kết quả đạt được là mới và có đóng góp đáng ghi nhận đến cộng đồng nghiên cứu trong lĩnh vực. Đây được xem là nền tảng cho các hướng nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho các loại đặt chỉnh này, nghiên cứu điều kiện ổn định nghiệm theo nghĩa liên tục, liên tục Hausdorff cho bài toán đang xét.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bednarczuck, E. (1994). An approach to well-posedness in vector optimization: consequences to stability. *Control and cybernetics*, *23*, 107-122.

Bourbaki, N. (2013). *General Topology: Chapters 1–4*. Springer Science & Business Media.

Chen, G. Y., Huang, X., & Yang, X. (2006). *Vector optimization: set-valued and variational analysis*. Springer Science & Business Media.

Camacho-Vallejo, J. F., González-Rodríguez, E., Almaguer, F. J., & González-Ramírez, R. G. (2015). A bilevel optimization model for aid distribution after the occurrence of a disaster. *Journal of Cleaner Production*, *105,* 134-145. https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2014.09.069

Dempe, S., Kalashnikov, V. V., & Kalashnykova, N. (2006). Optimality conditions for bilevel programming problems. In *Optimization with multivalued mappings*, 3-28, Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-34221-4_1

Dempe, S. (2018). *Bilevel optimization: theory, algorithms and applications.* TU Bergakademie Freiberg, Fakultät für Mathematik und Informatik.

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2003). Variational methods in partially ordered spaces. *CMS Books in Mathematics*.

Grötschel, M., Lovász, L., & Schrijver, A. (2012). *Geometric algorithms and combinatorial optimization.* Springer Science & Business Media.

Hu, S., & Papageorgiou, N. S. (1997). Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory, vol. 419 of. *Mathematics and its Applications*. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6359-4

Hansen, E., & Walster, G. W. (Eds.). (2003). *Global optimization using interval analysis: revised and expanded.* CRC Press. https://doi.org/10.1201/9780203026922

John, J. (2004). Vector Optimization, Theory, Application, and Extensions.

Jiang, C., Han, X., & Xie, H. (2021). *Nonlinear Interval Optimization for Uncertain Problems.* Springer Verlag, Singapro. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8546-3

Khan, A. A., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*. Springer-Verlag Berlin An. https://doi.org/10.1007/978-981-15-8546-3

Kassay, G., & Radulescu, V. (2018). *Equilibrium problems and applications.* Academic Press.

Kis, T., Kovács, A., & Mészáros, C. (2021). On optimistic and pessimistic bilevel optimization models for demand response management. *Energies*, *14*, 2095. https://doi.org/10.3390/en14082095

Lignola, M. B., & Morgan, J. (1997). Stability of regularized bilevel programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *93*(3), 575-596. https://doi.org/10.1023/A:1022695113803

Li, G., Tang, L., Huang, Y., & Yang, X. (2022). Stability for semivectorial bilevel programs. *Journal of industrial & management optimization*, *18*(1), 427. https://doi.org/10.3934/jimo.2020161

Marti, K. (2005). *Stochastic optimization methods*. Berlin: Springer.

Miglierina, E., Molho, E., & Rocca, M. (2005). Well-posedness and scalarization in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *126*(2), 391-409. https://doi.org/10.1007/s10957-005-4723-1

Mehlitz, P., & Zemkoho, A. B. (2021). Sufficient optimality conditions in bilevel programming. *Mathematics of operations research*, *46*(4), 1573-1598. https://doi.org/10.1287/moor.2021.1122

Pardalos, P. M., Žilinskas, A., & Žilinskas, J. (2017). *Non-convex multi-objective optimization.* New York: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61007-8

Sinha, A., Malo, P., & Deb, K. (2017). A review on bilevel optimization: from classical to evolutionary approaches and applications. *IEEE transactions on evolutionary computation*, *22*(2), 276-295. https://doi.org/10.1109/TEVC.2017.2712906

Ye, J. J., & Zhu, D. (2010). New necessary optimality conditions for bilevel programs by combining the MPEC and value function approaches. *SIAM journal on optimization*, *20*(4), 1885-1905. https://doi.org/10.1137/080725088