Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN 10 NHÌN TỪ GÓC ĐỘ CỦA LÝ THUYẾT NHÂN HỌC

Trần Văn Tín[1] và Bùi Anh Tuấn[2]

[1] *Học viên cao học ngành Lý luận và Phương pháp dạy học Toán K19, Khoa Sư phạm*
[2] *Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 18/04/2014
Ngày chấp nhận: 27/06/2014

Title:
The Problem to find the maximum and minimum values in mathematical textbooks Grade 10: towards the perspective of Anthropological theory

Từ khóa:
Giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất, bài toán Min – Max, Nhân học

Keywords:
Maximum value - minimum value, Min – Max problem, Anthropological theory

ABSTRACT

The Problem to find the maximum and minimum values (Min - Max problems) that we would like to mention here is to find the maximum and minimum values of the algebraic expressions or functions in the mathematical textbooks Grade 10. In this article, we will use the tools of the Anthropological theory to analyze the Problem. Therefore, the objectives of the article are to show the characteristics of the Min - Max problems in the mathematical textbooks Grade 10 and to clarify the techniques used to solve the Problem. From the analysis results, we will offer some general comments about this Problem.

TÓM TẮT

Bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (bài toán Min – Max) mà chúng tôi muốn để cập đến ở đây là bài toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất của biểu thức đại số hay hàm số trong chương trình toán 10 hiện hành. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ dùng các công cụ của lý thuyết Nhân học để phân tích bài toán trên. Do đó, mục tiêu của bài viết là: chỉ ra các đặc trưng của bài toán Min – Max trong chương trình toán 10; làm rõ các kỹ thuật được dùng để giải bài toán trên. Từ kết quả phân tích, chúng tôi đưa ra một số nhận định chung về bài toán này.

1 GIỚI THIỆU

1.1 Lý thuyết Nhân học

Thuyết Nhân học được chúng tôi dùng tham chiếu trong bài viết này là một bộ phận của lý thuyết Nhân học trong Didactic Toán. Lý thuyết này có nhiều mảng kiến thức nhưng trong khuôn khổ cho phép của bài viết này, chúng tôi chỉ đề cập đến vấn đề sau:

Tổ chức toán học, tổ chức sư phạm

Chevallard đã hình thành khái niệm praxéologie gồm bốn thành tố sau đây:

– *Kiểu nhiệm vụ T* (chứa nhiều *nhiệm vụ t*) hiện diện trong một thể chế nào đó.

– *Kỹ thuật* τ cho phép thực hiện các nhiệm vụ t của cùng một kiểu nhiệm vụ T.

– *Công nghệ* θ là văn bản lý giải cho kỹ thuật τ.

– *Lý thuyết* Θ là công nghệ của công nghệ θ.

Từ *praxèologie* có nguồn gốc từ hai thuật ngữ Latinh: *praxis* nghĩa là hành động (action) và *logos* – giải thích (discours, raison). Một praxèologie $[T,\tau,\theta,\Theta]$ được gọi là một: *Tổ chức toán học* nếu

T, τ, θ, Θ có bản chất toán học; *Tổ chức didactique* nếu T, τ, θ, Θ có bản chất didactique.

Các tổ chức toán học được chia thành bốn cấp độ khác nhau: *Tổ chức bộ phận* (ponctuelle): $\left[T, \tau, \theta, \Theta\right]$; *Tổ chức địa phương* (locate): $\left[T_i, \tau_i, \theta, \Theta\right]$; *Tổ chức vùng* (régionale): $\left[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta, \Theta\right]$; *Tổ chức tổng thể* (globale): $\left[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{\text{ij}}, \Theta_i\right]$.

1.2 Bài toán Min –Max

Cho biểu thức (hàm số) *y = f(x)* có miền xác định là $D \subset R$

– Số *m* được gọi là giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức (hàm số) *f(x)* trên *D*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D : f(x) \le m \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

Ta kí hiệu $m = \underset{x \in D}{Max}\, y = \underset{x \in D}{Max}\, f(x)$.

– Số *m* được gọi là giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức (hàm số) *f(x)* trên *D*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D : f(x) \ge m \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

Ta kí hiệu $m = \underset{x \in D}{Min}\, y = \underset{x \in D}{Min}\, f(x)$.

2 BÀI TOÁN MIN – MAX TRONG SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 10

Công cụ chính của lý thuyết Nhân học được chúng tôi sử dụng để phân tích bài toán Min – Max là tổ chức toán học. Ở đây, kiểu nhiệm vụ *T* tất nhiên là bài toán Min – Max, và vấn đề đặt ra là phân tích các kỹ thuật được sử dụng để giải quyết *T* trong chương trình toán 10. Vì khuôn khổ bài viết có hạn nên chúng tôi khảo sát chương trình đại số (ĐS) 10 cơ bản (CB) và nâng cao (NC) gồm có: sách giáo khoa (SGK), sách bài tập (SBT) và sách giáo viên (SGV). Đây là các tài liệu chính thống hỗ trợ cho việc dạy học của giáo viên, do đó chúng tôi chọn các tài liệu này để phân tích là thỏa đáng.

Trước hết, chúng tôi có bảng thống kê về số bài tập trong SGK và SBT ĐS 10 cơ bản và nâng cao về kiểu nhiệm vụ *T* đối với biểu thức một biến và biểu thức hai hoặc ba biến như sau:

Bảng 1: Bảng thống kê số bài tập về kiểu nhiệm vụ *T* theo số biến trong chương trình toán 10

Kiểu nhiệm vụ *T*	SGK & SBT ĐS 10 NC		SGK & SBT ĐS 10 CB	
	Số lượng	Tỉ lệ	Số lượng	Tỉ lệ
Tìm min – max của biểu thức 1 biến	11 bài	**78,57%**	5 bài	**100%**
Tìm min – max biểu thức 2 hoặc 3 biến	3 bài	**21,43%**	0 bài	**0%**

Từ *Bảng 1*, chúng ta nhận thấy kiểu nhiệm vụ *T* được cho với biểu thức chứa tối đa là ba biến. Điều này là thích đáng vì phù hợp với kiến thức trang bị cho học sinh và năng lực của học sinh ở lớp 10. Bên cạnh đó, có sự chiếm ưu thế rõ rệt của các bài toán tìm Min – Max của biểu thức một biến so với biểu thức hai hoặc ba biến. Điều đó chứng tỏ chương trình ĐS 10 phần lớn là tập trung luyện tập cho học sinh kiểu nhiệm vụ *T* cho biểu thức một biến, còn việc rèn luyện kiểu nhiệm vụ *T* cho biểu thức hai hoặc ba biến thì khá hạn chế.

Phần tiếp theo, chúng tôi sẽ chỉ ra các kỹ thuật được dùng trong chương trình toán 10 để giải quyết kiểu nhiệm vụ *T*. Đầu tiên, chúng tôi xin trích dẫn *bài tập 13* (SGK ĐS 10 nâng cao tr.110) và *bài tập 4.21* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.105) để phân tích

"Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \dfrac{2}{x-1}$ *với* $x > 1$ *",*

và lời giải mong muốn cho *bài tập 13* được trình bày trong SGV (tr.156) như sau:

"Vì $x > 0$ *nên* $x - 1$ *và* $\dfrac{2}{x-1}$ *là hai số dương. Do đó*

$$f(x) = x + \frac{2}{x-1} = 1 + x - 1 + \frac{2}{x-1} \ge 1 + 2\sqrt{(x-1).\frac{2}{x-1}} = 1 + 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 1 = \dfrac{2}{x-1}$ *và* $x > 1$, *tức là khi* $x = 1 + \sqrt{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ *là* $f\left(1 + \sqrt{2}\right) = 1 + 2\sqrt{2}$ *".*

Tiếp theo là phần trích dẫn cho *bài tập 4.21* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.105)

"Cho $a > 0,$ hãy tìm giá trị lớn nhất của

$$y = x(a-2x)^2 \text{ với } 0 \le x \le \frac{a}{2} \text{ ",}$$

và dưới đây là lời giải mong đợi cho bài toán trên

"Do $0 \le x \le \frac{a}{2}$ nên $a - 2x \ge 0.$ Ta có

$$x(a-2x)^2 = \frac{1}{4}.4x.(a-2x)(a-2x) \le \frac{1}{4}.\left(\frac{4x+a-2x+a-2x}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{4}.\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $4x = a - 2x,$ tức là $x = \frac{a}{6}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{2a^3}{27}$ khi và chỉ khi $x = \frac{a}{6}$ ".

Từ những dòng lời giải của trích dẫn hai bài toán trên, chúng tôi có thể rút ra một kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ *T* như sau:

*a. *Kỹ thuật τ_1: sử dụng bất đẳng thức Cauchy*

Tìm Min:

– Dùng các phép biến đổi đại số đưa biểu thức đã cho về dạng tổng các nhóm hạng tử không âm có tích của chúng là hằng số.

– Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 hoặc 3 số không âm đối với các nhóm thu được ở bước trên để được kết quả. Thông thường ta sẽ sử dụng các bất đẳng thức sau:

$$a + b \ge 2\sqrt{ab} \text{ hoặc } a^2 + b^2 \ge 2ab$$

$$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \text{ hoặc } a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$$

Tìm Max:

– Bước 1: dùng các phép biến đổi đại số đưa biểu thức đã cho về dạng tích các nhóm hạng tử không âm có tổng của chúng là hằng số.

– Bước 2: áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 hoặc 3 số không âm sau để được kết quả

$$ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \text{ hoặc } ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$abc \le \frac{(a+b+c)^3}{27} \text{ hoặc } abc \le \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Cũng cần lưu ý, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng trong bất đẳng thức Cauchy xảy ra. Lúc đó, ta xác định được biểu thức đạt Min – Max tại giá trị nào của biến. Với kỹ thuật τ_1, chúng ta không những giải quyết được kiểu nhiệm vụ *T* đối với biểu thức một biến mà còn có thể áp dụng đối với biểu thức hai hoặc biến. Mời bạn đọc theo dõi phần trích dẫn *bài tập 4.24* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.105) để minh chứng điều đó

"Cho a,b,c là ba số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}. \text{"}$$

và dưới đây là lời giải mong muốn trong tài liệu trên

"Đặt $b + c = x, c + a = y, a + b = z.$

Do a,b,c dương nên x,y,z dương và $a = \frac{-x+y+z}{2}; b = \frac{x-y+z}{2}; c = \frac{x+y-z}{2}.$ Khi đó ta có

$$A = \frac{-x+y+z}{2} + \frac{x-y+z}{2} + \frac{x+y-z}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3\right)$$

$$\ge \frac{1}{2}.(2.3-3) = \frac{3}{2}.$$

Học sinh tự giải tiếp."

Tuy lời giải của bài toán trong trích dẫn trên chưa hoàn chỉnh, chúng ta vẫn thấy rõ sự tồn kỹ thuật τ_1 trong lời giải ấy. Điểm khác biệt của bài toán này (bài tập 4.24) so với hai bài trên (bài tập 13 và bài tập 4.21) là các phép biến đổi đẳng thức (có sử dụng ẩn phụ) để đưa biểu thức đã cho về dạng thuận lợi nhất. Sau đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy để ta được kết quả của bài toán.

Phần tiếp theo, chúng tôi xin trích dẫn *bài tập 4.14* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.104) để chỉ ra một kỹ thuật khác

"Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x) = |x - 2006| + |x - 2007| \text{ ",}$$

lời giải được mong đợi như sau

"$f(x)=|x-2006|+|x-2007|\ge|x-2006-(x-2007)|=1.$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x=2006.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ *là 1".*

Theo phần lời giải của trích dẫn trên, chúng tôi rút ra được một kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ *T* sau:

*b. * Kỹ thuật* τ_2 *: sử dụng bất đẳng thức về trị tuyệt đối tìm Min của biểu thức*

– Điều kiện áp dụng: khi trong biểu thức đã cho chứa tổng trị tuyệt đối các đa thức và tổng (hoặc hiệu) của chúng là hằng số hoặc ngược lại.

– Sử dụng các bất đẳng thức về trị tuyệt đối sau để được kết quả

$$|a|+|b|\overset{(1)}{\ge}|a+b|\overset{(2)}{\ge}|a|-|b|\ (1);$$

$$|a|+|b|+|c|\ge|a+b+c|\ (3);$$

$$|a|+|b|\overset{(4)}{\ge}|a-b|\overset{(5)}{\ge}|a|-|b|$$

Nên lưu ý rằng, đẳng thức xảy ra: ở bất đẳng thức (1) khi *a* và *b* cùng dấu, ở bất đẳng thức (2) khi $\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$ và ở bất đẳng thức (3) khi *a, b, c* cùng dấu. Tương tự, dấu bằng ở (4) xảy ra khi a và b trái dấu, và ở (5) xảy ra khi $a-b>0$. Do đó, chúng ta có thể xác định được khi nào thì biểu thức đạt Min.

Chúng tôi xét tiếp *bài tập 4.88 câu b* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.117)

"Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

$Q=|x-1|+|y-2|+|z-3|$ *với* $|x|+|y|+|z|=2006$ "

lời giải được mong đợi của bài toán trên như sau

"Áp dụng bất đẳng thức $|a-b|\ge|a|-|b|$ *ta được*

$$|x-1|\ge|x|-1,$$

$$|y-2|\ge|y|-2,$$

$$|z-3|\ge|z|-3.$$

Do đó $Q\ge|x|+|y|+|z|-6=2006-6=2000.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x-1\ge0; y-2\ge0; z-3\ge0$ *và* $x+y+z=2006.$

Chẳng hạn $x=2000; y=z=3$ *thì* $|x-1|=1999; |y-2|=1; |z-3|=0.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là 2000."

Lời giải của bài toán trên vẫn dùng kỹ thuật τ_2 để giải. Như vậy, qua phần trích dẫn của hai bài toán trên (4.14 và 4.88) chúng tôi có hai nhận định sau về τ_2. Thứ nhất là trong chương trình toán 10 kỹ thuật τ_2 có thể tìm Min của biểu thức. Thứ hai là kỹ thuật τ_2 được sử dụng giải quyết bài toán tìm Min của biểu thức đại số với số biến không quá ba.

Trong chương trình ĐS 10, chúng tôi còn nhận thấy một kỹ thuật khác để giải quyết kiểu nhiệm vụ *T*. Ở đây, chúng tôi xin trích dẫn *bài tập 4.11* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.104) để thấy rõ kỹ thuật đó

"a) Cho hai số $a,b\ (a\ne b)$*. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2.$$

b) Cho ba số a,b,c *đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$g(x)=(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2\text{"},$$

và sau đây là lời giải được mong đợi trong phần lời giải cùng nằm trong tài liệu trên

"a) $$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2$$
$$=2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(a-b)^2}{2}.$$

Ta có $f(x)\ge\frac{(a-b)^2}{2}$ *với mọi* a,b *; đẳng thức xảy ra khi* $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2=0,$ *tức là* $x=\frac{a+b}{2}.$

Vậy $f(x)$ *đạt giá trị nhỏ nhất là* $\frac{(a-b)^2}{2}$ *tại* $x=\frac{a+b}{2}.$

Chú ý. Tránh sai lầm khi suy luận rằng $(x-a)^2+(x-b)^2\ge0$ *với mọi x nên giá trị nhỏ nhất của* $f(x)$ *là 0.*

b) Hướng dẫn. Viết $g(x)$ *dưới dạng*

$$3\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^2+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}\text{”.}$$

*c. *Kỹ thuật* τ_3*: sử dụng biến đổi đẳng thức đưa về dạng tổng các bình phương*

– Biến đổi biểu thức đã cho về dạng tổng bình phương của một đa thức hoặc tổng các bình phương của các đa thức với hằng số.

– Ta sẽ xét một trong hai trường hợp sau:

Nếu hệ số phía trước bình phương là dương thì ta có thể xác định Min của biểu thức đã cho là hằng số phía sau bình phương và chỉ xảy ra khi biểu thức bên trong bình phương bằng 0.

Nếu hệ số phía trước bình phương là âm thì ta có thể xác định Max của biểu thức đã cho là hằng số phía sau bình phương và chỉ xảy ra khi biểu thức bên trong bình phương bằng 0.

Tiếp theo, chúng tôi xin trích dẫn thêm bài tập 4.86 (SBT ĐS 10 nâng cao tr.116) giúp bạn đọc thấy rõ hơn việc sử dụng τ_3 để giải quyết kiểu nhiệm vụ *T* đối với biểu thức hai biến.

“Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A=a^2+b^2+ab-3a-3b+2006;$

b) $B=a^2+2b^2-2ab+2a-4b-12$”

và bên dưới là lời giải được mong đợi trong phần lời giải của tài liệu trên

“*a) Ta có* $A=(a-1)^2+(b-1)^2+ab-a-b+2004$

$$=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)+2003$$

$$=\left[(a-1)+\frac{b-1}{2}\right]^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2003\geq 2003.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} a-1+\dfrac{b-1}{2}=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1. \end{cases}$$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2003 khi $a=b=1$.

b) $B=(a-b+1)^2+(b-1)^2-14\geq -14.$

Vậy B nhỏ nhất bằng -14 *khi* $a=0, b=1$. ”

Dù biểu thức đã cho có chứa một biến hay nhiều hơn, chúng ta thấy không có sự khác biệt nhiều trong các bước xử lý với kỹ thuật τ_3. Bởi vì, ở đây chỉ cần vận dụng thành thạo các phép biến đổi đẳng thức để đưa biểu thức đã cho về dạng tổng các bình phương của các đa thức với một hằng số. Từ đó, chúng ta có thể kết luận Min – Max của biểu thức đã cho. Điểm khác nhau ở *bài 4.86* so với *bài 4.11* có chăng đó chính là độ khó, bởi vì để biến đổi biểu thức chứa các biến khác nhau về tổng hoặc hiệu bình phương không phải học sinh nào cũng làm được.

3 KẾT LUẬN

Như vậy, đối với kiểu nhiệm vụ *T* thì trong chương trình toán 10 có các kỹ thuật giải là τ_1, τ_2, τ_3. Mặc dù, kiến thức về hàm số (bậc nhất và bậc hai) đã được trang bị cho học sinh rất đầy đủ. Tuy nhiên, cả ba kỹ thuật trên đều chưa vận dụng quan điểm hàm số để giải quyết kiểu nhiệm vụ này. Rõ ràng, nếu vận dụng quan điểm hàm số vào giải quyết kiểu nhiệm vụ *T* ở một số trường hợp thì bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn. Chẳng hạn, chúng tôi vận dụng kiến thức hàm số bậc hai vào giải *câu a bài tập 4.11* (SBT ĐS 10 nâng cao tr.104)

“a) Cho hai số $a,b\ (a\neq b)$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2\text{”.}$$

Thay vì giải bài toán này theo kỹ thuật τ_3 như đã đề cập ở trên, ta biến đổi biểu thức

$$f(x)=(x-a)^2+(x-b)^2=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2.$$

Khi đó, $f(x)$ có dạng của một hàm số bậc hai $f(x)=Ax^2+Bx+C$ với $A=2,\ B=-2(a+b),$

$C=a^2+b^2$. Vì $A=2>0$ nên hàm số đạt Min tại đỉnh của parabol. Do đó,

$$Min f(x)=-\frac{\Delta}{4A}=-\frac{4(a+b)^2-8(a^2+b^2)}{8}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{2}$$

khi $x=-\dfrac{B}{2A}=\dfrac{2(\mathrm{a+b})}{4}=\dfrac{(a+b)}{2}$.

Với cách giải này không những giúp giải bài toán gọn nhẹ hơn mà còn đưa một cách tiếp cận mới cho học sinh đó là giải bài toán Min – Max theo quan điểm hàm số, đây cũng là sợi dây kết nối của đại số và giải tích.

Cuối cùng, chúng tôi có bảng thống kê về các kỹ thuật giải nêu trên cho các bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số hoặc biểu thức ở chương trình ĐS 10 như sau:

Bảng 2: Bảng thống kê số bài tập về kiểu nhiệm vụ *T* trong chương trình toán 10 được giải bằng các kỹ thuật τ_1, τ_2, τ_3

Kỹ thuật	SGK & SBT ĐS 10 NC		SGK & SBT ĐS 10 CB	
	Số lượng	Tỉ lệ	Số lượng	Tỉ lệ
τ_1	9 bài	**69,23%**	5 bài	**100%**
τ_2	2 bài	**15,385%**	0	**0%**
τ_3	2 bài	**15,385%**	0	**0%**

Dựa vào *Bảng 2*, ta có thể thấy ưu thế gần như tuyệt đối của kỹ thuật τ_1 (chiếm 69,23% ở chương trình nâng cao, 100% ở chương trình cơ bản) so với τ_2 và τ_3.

Cuối cùng, chúng tôi có thể rút ra một số kết luận sau:

– Kiểu nhiệm vụ *T* được cho với số biến không quá ba, và sự chiếm ưu thế của bài toán tìm Min – Max của biểu thức một biến cho thấy chương trình ĐS 10 chủ yếu luyện tập cho học sinh kiểu nhiệm vụ T cho biểu thức một biến mà thôi.

– Đối với kiểu nhiệm vụ *T* thì trong chương trình toán 10 phần lớn tập trung rèn luyện cho học sinh sử dụng kỹ thuật τ_1 (sử dụng bất đẳng thức Cauchy).

– Việc sử dụng kiến thức về hàm số (bậc nhất và bậc hai) trong chương trình toán 10 để giải quyết kiểu nhiệm vụ *T* chưa hề được nhắc tới. Đây là một trở ngại không nhỏ cho học sinh khi tiếp cận các bài toán về kiểu nhiệm vụ *T* mà khi giải cần phối hợp công cụ đại số (bất đẳng thức) và công cụ giải tích (hàm số).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Annie Bessot, Claude Comiti, Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến (2010), Những yếu tố cơ bản của Didactic toán, NXB Đại học Quốc Gia TP.HCM.
2. Nguyễn Huy Đoan, Phạm Thị Bạch Ngọc, Đoàn Quỳnh, Đặng Hùng Thắng và Lưu Xuân Tình, 2007. Sách bài tập Đại số 10 nâng cao. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội. 264 trang.
3. Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng và Nguyễn Tiến Tài, 2007. Sách giáo viên Đại số 10. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội. 192 trang.
4. Trần Văn Hạo, Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Đỗ Mạnh Hùng và Nguyễn Tiến Tài, 2007. Đại số 10. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội. 175 trang.
5. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng và Trần Văn Vuông, 2007. Đại số 10 nâng cao. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội. 239 trang.
6. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng và Trần Văn Vuông, 2007. Sách giáo viên Đại số 10 nâng cao. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội. 303 trang.
7. Bùi Anh Tuấn, 2007. Đồ thị hàm số và nghiên cứu đường cong qua phương trình – Trường hợp đường thẳng. Luận văn thạc sĩ, Đại học Sư phạm TP. HCM. 91 trang.
8. Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Trần Văn Hạo, Đỗ Mạnh Hùng, Phạm Phu và Nguyễn Tiến Tài, 2007. Sách bài tập Đại số 10. Nhà xuất bản Giáo dục. Hà Nội. 231 trang.