TỔNG QUAN VỀ MÔ ĐUN NỘI XẠ VÀ CÁC MỞ RỘNG CỦA NÓ

Nguyễn Quốc Tiến*, Đào Thị Trang
Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP.HCM
*Email: *tiennq@hufi.edu.vn*
Ngày nhận bài: 15/6/2022; Ngày chấp nhận đăng: 25/7/2022

TÓM TẮT

Bài báo trình bày tổng quan về mô đun nội xạ và một số mở rộng của nó. Tác giả giới thiệu một số kết quả của các nghiên cứu trong và ngoài nước có liên quan và kết quả nghiên cứu gần đây của nhóm tác giả. Mục đích của bài báo nhằm giới thiệu một hướng nghiên cứu tiềm năng trong lý thuyết vành và mô đun hiện nay.

Từ khóa: Mô đun nội xạ, mô đun tựa nội xạ, mô đun bất biến đẳng cấu.

1. GIỚI THIỆU

Khái niệm mô đun nội xạ được R. Baer đầu tiên đưa ra vào năm 1940, lớp mô đun nội xạ có một vị trí trung tâm đặc biệt trong lý thuyết vành và mô đun mà từ đó các nhà toán học luôn tìm cách mở rộng theo nhiều hướng khác nhau và đã có rất nhiều lớp mô đun mở rộng của nó ra đời. Những năm gần đây, ở trong nước, nhóm nghiên cứu của Lê Văn Thuyết, Trương Công Quỳnh đã đưa ra thêm nhiều tính chất của các lớp mô đun tựa nội xạ, giả nội xạ, giả nội xạ cốt yếu, giả C-nội xạ, giả C^+-nội xạ, giả S-nội xạ,... và vận dụng chúng để đặc trưng cho nhiều lớp vành; trên thế giới nhiều nhà toán học tiêu biểu như Er, Singh, Srivastava, Asensio, Kosan, Lee, Zhou,... cũng liên tục cho ra các kết quả liên quan. Khi chúng ta xem vành R như là R-mô đun phải và mỗi iđêan phải như là một R-mô đun con. Năm 1969, Jain và Singh đã nghiên cứu lớp vành mà mỗi iđêan phải là tựa nội xạ, lớp vành này được gọi là *q*-vành phải và họ đã chỉ ra một số đặc trưng quan trọng cho lớp vành này [1]. Sau đó, G. Ivanov đã tổng quát lớp *q*-vành, gọi là *fq*-vành phải, đó là lớp vành mà mỗi iđêan phải hữu hạn sinh là tựa nội xạ. Tác giả Ivanov đã nghiên cứu *fq*-vành liên kết với các khái niệm lũy đẳng nguyên thủy trù mật và lũy đẳng không suy biến, từ đó tác giả đã thu được một số kết quả thú vị [2]. Mở rộng các lớp vành nói trên theo hướng từ tính tựa nội xạ đến tính bất biến đẳng cấu, các tác giả Kosan, Quỳnh và Srivastava đã giới thiệu lớp vành mà mỗi iđêan phải là bất biến đẳng cấu, lớp vành này được gọi là *a*-vành phải và họ đã thu được nhiều kết quả về cấu trúc đẹp cho lớp vành này. Chẳng hạn, một *a*-vành phải là tổng trực tiếp của vành nửa đơn chính phương đầy đủ và vành không chính phương phải. Các tác giả cũng đã thu được định lý về cấu trúc cho một *a*-vành phải không phân tích được, Artin phải, không suy biến phải được biểu diễn như là một vành các ma trận tam giác khối [3]. Tiếp tục nghiên cứu theo hướng này, Quỳnh, Abyzov và Trang đã đưa ra lớp vành mà mỗi iđêan phải hữu hạn sinh là bất biến đẳng cấu và gọi đó là lớp *fa*-vành phải. Các kết quả liên quan đến *fa*-vành phải đã được nghiên cứu trong [4]. Từ đó thấy rằng, việc nghiên cứu về mô đun nội xạ và các mở rộng của nó vẫn còn mới mẻ cần được nghiên cứu và làm rõ. Trong bài báo này chúng tôi tổng quan về mô đun nội xạ và các mở rộng của nó đã được các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước công bố. Đồng thời chúng tôi cũng đưa ra một số kết quả cho các lớp mô đun này.

2. NỘI DUNG

Khái niệm mô đun nội xạ được R. Baer đầu tiên đưa ra vào năm 1940. Theo đó:

Định nghĩa 2.1. Mô đun U được gọi là M-nội xạ nếu với mỗi mô đun con K của M, mọi đồng cấu $v: K \to U$ đều mở rộng được đến đồng cấu $\bar{v}: M \to U$. Tức là, sơ đồ sau đây giao hoán ($\bar{v}f = v$):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"] & M \arrow[dl, "\bar{v}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Mô đun U được gọi là nội xạ nếu U là M-nội xạ với mọi mô đun M_R. Vành R được gọi là tự nội xạ phải nếu R_R là nội xạ.

Ngoài ra, Baer còn đưa ra một tiêu chuẩn để nhận biết một R-mô đun M là nội xạ, đó là:

Định lý 2.2. [Tiêu chuẩn Baer] *Mô đun M_R là nội xạ nếu với mọi iđêan phải I của R, mọi đồng cấu $f: I_R \to M_R$ đều mở rộng được đến đồng cấu $g: R_R \to M_R$*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R_R \arrow[dl, "g"] \\ & M_R & \end{tikzcd}$$

Liên quan đến mô đun nội xạ, chúng tôi đã chứng minh được kết quả sau đây:

Định lý 2.3. *Cho R là vành Goldie phải nửa nguyên tố và M là R-mô đun phải. Khi đó, mô đun con suy biến $Z(M)$ chính là mô đun con xoắn $t(M)$ của mô đun M. Hơn nữa, $Z(M)$ là mô đun con đóng của M.*

Chứng minh. Giả sử R là vành Goldie phải nửa nguyên tố. Xét $m \in t(M)$, tồn tại phần tử x không là ước của 0 thuộc R sao cho $mx = 0$. Khi đó, $mxR = 0$ nên $xR \leq r_R(m)$. Do x là phần tử không là ước của 0 thuộc R nên theo ([5], Lemma 6.11) $xR \leq^e R_R$, suy ra $r_R(m) \leq^e R_R$, do đó $m \in Z(M)$. Ngược lại, xét $m \in Z(M)$ suy ra $r_R(m) \leq^e R_R$. Theo ([5], Proposition 6.13), $r_R(m)$ chứa một phần tử $r \in R$ nhưng không là ước của 0 suy ra $mr = 0$ nên $m \in t(M)$. Như vậy, $t(M) = Z(M)$. Theo chứng minh trên, ta có $t(M/Z(M)) = Z(M/Z(M))$. Áp dụng ([5], Proposition 7.8) suy ra $Z(M/Z(M)) = 0$. Gọi L là mô đun con của M thỏa mãn điều kiện $Z(M) \leq^e L \leq M$, do $L/Z(M)$ là mô đun suy biến nên $L/Z(M) = Z(L/Z(M))$. Mặt khác, $Z(L/Z(M)) = Z(M/Z(M)) \cap L/Z(M) = 0$, suy ra $L = Z(M)$. Vậy, $Z(M)$ là mô đun con đóng của mô đun M.

Mệnh đề 2.4. *Cho R là vành Goldie phải nguyên tố, N là R-mô đun bất kỳ và M là R-mô đun khác không, không suy biến. Khi đó, nếu N là M-nội xạ thì N là R-mô đun nội xạ.*

Chứng minh. Do R là vành Goldie phải nguyên tố, ta được $t(M) = Z(M)$. Vì M không suy biến nên $Z(M) = 0$, hay M là R-mô đun phải không xoắn. Do đó, theo Định lý ([5], Lemma 7.17) M có một mô đun con A đẳng cấu với một iđêan phải I của R. Theo giả thiết, N là M-nội xạ nên N là A-nội xạ, do đó N là I-nội xạ với I là iđêan phải của R. Ta thu được N là mô đun nội xạ.

Năm 1961, Johnson và Wong [6] đã đưa ra khái niệm mô đun tựa (tự) nội xạ. Mô đun M được gọi là tựa nội xạ nếu M là M-nội xạ. Johnson và Wong cũng đã chứng minh được:

Định lý 2.5. [6] *M là mô đun tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M bất biến qua tất cả các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó.*

Dựa trên kết quả này, các nhà toán học đã có ý tưởng thay các tự đồng cấu bởi các tự đẳng cấu. Năm 2013, hai tác giả Lee và Zhou đã đưa ra khái niệm mô đun bất biến đẳng cấu, theo đó:

Định nghĩa 2.6. [7] Mô đun M được gọi là bất biến đẳng cấu nếu M bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó.

Hai tác giả Lee và Zhou cũng đã chỉ ra các phát biểu tương đương với định nghĩa mô đun bất biến đẳng cấu:

Định lý 2.7. ([7], Theorem 2) *Cho M là R-mô đun. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:*

1) M là mô đun bất biến đẳng cấu.

2) Với mọi đẳng cấu giữa hai mô đun con cốt yếu của M có thể mở rộng thành một tự đồng cấu của M.

3) Với mọi đẳng cấu giữa hai mô đun con cốt yếu của M có thể mở rộng thành một tự đẳng cấu của M.

Các tác giả đã chỉ ra các tính chất cho lớp mô đun này:

Mệnh đề 2.8. [7] *Cho M, M_1, M_2 là các R-mô đun. Khi đó:*

1) Hạng tử trực tiếp của mô đun bất biến đẳng cấu M là bất biến đẳng cấu.

2) Nếu tổng trực tiếp $M_1 \oplus M_2$ là bất biến đẳng cấu thì M_1 là M_2-nội xạ và M_2 là M_1-nội xạ.

3) Mô đun M là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu $M \oplus M$ là mô đun bất biến đẳng cấu.

Tiếp theo sau đó, các tác giả N. Er, S. Singh, A. K. Srivastava cũng đã nghiên cứu về lớp mô đun bất biến đẳng cấu và đưa ra các khẳng định:

Định lý 2.9. [8] *Cho M là mô đun bất biến đẳng cấu. Khi đó:*

1) Nếu bao nội xạ của M có dạng $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ thỏa mãn điều kiện $E_1 \cong E_2$, thì $M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) \oplus (M \cap E_3)$.

2) Nếu A, B là hai mô đun con đóng của M thỏa mãn $A \cap B = 0$, thì A và B là hai mô đun nội xạ tương hỗ. Hơn nữa, bất kỳ đơn cấu $h: A \to M$ với $A \cap h(A) = 0$, $h(A)$ là mô đun con đóng trong M.

Như chúng ta đã biết với M là mô đun tựa nội xạ thì $J(End(M))$ gồm tất cả các tự đồng cấu của M có nhân cốt yếu và $End(M)/J(End(M))$ là vành chính quy von Neumann tự nội xạ phải. Asensio và Srivastava đã mở rộng kết quả này đối với mô đun bất biến đẳng cấu:

Mệnh đề 2.10. ([9], Proposition 1) *Cho M là mô đun bất biến đẳng cấu. Khi đó, vành $End(M)/J(End(M))$ là vành chính quy von Neumann và các luỹ đẳng nâng modulo $J(End(M))$. Hơn nữa, $J(End(M))$ gồm tất cả các tự đồng cấu của M có nhân cốt yếu, tức là: $J(End(M)) = \{s \in End(M) \mid Ker(s) \leq^e M\}$.*

Chúng ta lưu ý rằng, $End(M)/J(End(M))$ không nhất thiết là vành tự nội xạ phải như trong trường hợp M là mô đun tựa nội xạ.

Một mô đun được gọi là không chính phương nếu nó không chứa tổng trực tiếp của hai mô đun con khác không mà đẳng cấu với nhau. Hai mô đun được gọi là trực giao với nhau nếu chúng không chứa các mô đun con khác không đẳng cấu với nhau. Khi M là N-nội xạ và N là M-nội xạ thì ta nói ngắn gọn M và N là hai mô đun nội xạ tương hỗ.

Sau đây, chúng ta có một số kết quả liên quan đến các khái niệm nói trên:

Định lý 2.11. ([8], Theorem 3) *Cho M là mô đun bất biến đẳng cấu. Các phát biểu sau đây là đúng:*

1) $M = X \oplus Y$ với X là mô đun tựa nội xạ và Y là mô đun không chính phương mà trực giao với X. Trong trường hợp này, X và Y là hai mô đun nội xạ tương hỗ.

2) Nếu mô đun M không suy biến phải và với bất kỳ hai mô đun con D_1, D_2 của Y thỏa mãn $D_1 \cap D_2 = 0$ thì $\mathrm{Hom}(D_1, D_2) = 0$.

3) Nếu mô đun M không suy biến phải thì $\mathrm{Hom}(X,Y) = 0 = \mathrm{Hom}(Y,X)$.

Từ khái niệm mô đun bất biến đẳng cấu, chúng ta có khái niệm vành bất biến đẳng cấu phải, đó là vành R mà bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của bao nội xạ của R_R. Lớp vành bất biến đẳng cấu này là mở rộng thực sự của lớp vành tự nội xạ. Ta có các kết quả sau liên quan đến vành bất biến đẳng cấu, đã được các nhà toán học trong và ngoài nước nghiên cứu:

Từ Mệnh đề 2.10 ta suy ra kết quả sau đây đối với vành bất biến đẳng cấu:

Hệ quả 2.12. *Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải thì $R/J(R)$ là vành chính quy von Neumann, các lũy đẳng nâng modulo $J(R)$ và $Z(R_R) = J(R)$.*

Năm 2019, Quynh, Kosan, Thuyet đã nghiên cứu vành bất biến đẳng cấu phải với điều kiện dây chuyền và thu được một số kết quả sau đây:

Bổ đề 2.13. ([10], Lemma 1) *Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải. Khi đó, nếu hai phần tử $x, y \in R$ thỏa mãn $r_R(x) = r_R(y)$, thì $Rx = Ry$.*

Định lý 2.14. ([10], Theorem 1) *Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải và R thỏa mãn điều kiện ACC trên các linh hóa tử phải thì R là vành nửa nguyên sơ.*

Năm 1969, Jain và Singh đã nghiên cứu lớp vành mà mỗi iđêan phải là tựa nội xạ, lớp vành này được gọi là q-vành phải và họ đã chỉ ra các kết quả thú vị sau đây:

Mệnh đề 2.15. ([1], Theorem 2.3) *Các điều kiện sau đây là tương đương đối với vành R:*

1) R là q-vành phải.

2) R là vành tự nội xạ phải và mỗi iđêan phải của R có dạng eI với e là phần tử lũy đẳng nào đó của R và I là iđêan hai phía của R.

3) *R là vành tự nội xạ phải và mỗi iđêan phải đối cốt yếu của R là iđêan hai phía.*

Định lý 2.16. ([1], Theorem 2.6) *Vành đơn R là q-vành phải nếu và chỉ nếu R là vành Artin.*

Năm 1996, tác giả G. Ivanov đã tổng quát lớp q-vành phải, gọi là *fq*-vành phải, đó là lớp vành mà mỗi iđêan phải hữu hạn sinh là tựa nội xạ, tác giả đã chỉ ra:

Định lý 2.17. ([2], Lemma 1.4) *Một fq-vành phải không suy biến phải là vành chính quy von Neumann.*

Định lý 2.18. ([2], Theorem 1.9) *Một fq-vành phải không suy biến lũy đẳng là tổng trực tiếp của một vành có tập trù mật các lũy đẳng abelian và vành không có các lũy đẳng abelian.*

Gần đây, các tác giả Kosan, Quỳnh và Srivastava đã nghiên cứu lớp vành mà mỗi iđêan phải là bất biến đẳng cấu, lớp vành này được gọi là *a*-vành phải, các tác giả đã chỉ ra một số kết quả quan trọng sau đây:

Mệnh đề 2.19. ([3], Proposition 3.1) *Các phát biểu sau đây là tương đương đối với vành R:*

1) R là a-vành phải.

2) Với mỗi iđêan phải cốt yếu của R là bất biến đẳng cấu.

3) Với R là vành bất biến đẳng cấu phải và mỗi iđêan phải cốt yếu của R là T-mô đun trái với T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của nó.

Năm 2022, các tác giả Quỳnh, Abyzov và Trang đã nghiên cứu lớp vành mà mỗi iđêan phải hữu hạn sinh bất biến đẳng cấu và đặt tên cho lớp vành này là *fa*-vành phải, lớp vành này đã được công bố trong [4].

Định nghĩa 2.20. Vành R được gọi là *fa*-vành phải nếu mỗi iđêan phải hữu hạn sinh của R là bất biến đẳng cấu.

Chúng tôi đã chỉ ra các đặc trưng cho lớp vành này, tiêu biểu là các kết quả sau đây:

Định lý 2.21. [4] *Một fa-vành phải không suy biến phải R là vành chính quy von Neumann.*

Chứng minh. Do R là *fa*-vành phải nên nó bất biến đẳng cấu, suy ra $R/J(R)$ là vành chính quy von Neumann và $J(R)=Z(R_R)$. Mặt khác, R không suy biến phải nên $J(R)=0$, do đó R là vành chính quy von Neumann.

Mệnh đề 2.22. [4] *Cho R là vành có chiều Goldie hữu hạn. Khi đó, các điều kiện sau đây là tương đương:*

1) R là fa-vành phải.

2) Mỗi iđêan phải hữu hạn sinh cốt yếu trong R là bất biến đẳng cấu.

3) Vành R là bất biến đẳng cấu phải và mỗi iđêan phải hữu hạn sinh cốt yếu trong R là T-mô đun trái, với T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của nó.

Chứng minh. $(1)\Rightarrow(2)$ là hiển nhiên.

$(2)\Rightarrow(1)$ Gọi A là iđêan phải hữu hạn sinh bất kỳ của R. Tồn tại iđêan phải B của R sao cho $A\oplus B\leq^e R$. Vì R có chiều Goldie hữu hạn, tồn tại iđêan phải hữu hạn sinh I của R sao cho $I\leq^e B$, và do đó $A\oplus I\leq^e R$. Theo (2), ta có $A\oplus I$ là mô đun bất biến đẳng cấu. Khi đó, A là bất biến đẳng cấu. Suy ra R là *fa*-vành phải.

$(2)\Rightarrow(3)$ Nếu mỗi iđêan phải hữu hạn sinh cốt yếu I của R là bất biến đẳng cấu thì R là vành bất biến đẳng cấu phải và $E(I)=E(R)$. Gọi T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của R. Khi đó, T là vành con của $End(E(R))$. Do đó $TI=I$, suy ra I là T-mô đun trái.

$(3)\Rightarrow(2)$ Nếu I là iđêan phải hữu hạn sinh cốt yếu trong R. Khi đó $E(I)=E(R)$. Gọi φ là một tự đẳng cấu bất kỳ của $E(R)$. Khi đó $\varphi(R)\leq R$ và $R\leq\varphi^{-1}(R)$. Do đó, $\varphi(R)=R$. Vì $1\in R$ nên tồn tại $x\in R$ sao cho $\varphi(x)=1$. Do đó $\varphi(1x)=\varphi(1)x=1$. Tức là $\varphi(1)$ khả nghịch trong R. Theo (3), ta có $\varphi(I)=\varphi(1I)=\varphi(1)I\leq I$. Do đó, I là bất biến đẳng cấu.

Hệ quả 2.23. *Cho R là vành Nơte. Khi đó, R là fa-vành phải khi và chỉ khi mỗi iđêan phải hữu hạn sinh cốt yếu trong R là bất biến đẳng cấu.*

Định lý 2.24. *Cho R là một fa-vành phải sao cho mọi phần tử lũy đẳng của R thuộc vào tâm của R. Khi đó, R là vành không chính phương phải.*

Chứng minh. Giả sử R *là fa-vành phải.* Khi đó, theo ([4], Theorem 3.8), chúng ta có đẳng cấu vành $R\cong\begin{pmatrix} eRe & 0 \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e)\end{pmatrix}$, trong đó $(1-e)R(1-e)$ là vành không chính phương phải, với e là phần tử lũy đẳng nào đó của R. Vì mọi phần tử lũy đẳng của R đều thuộc tâm nên $(1-e)Re=0$. Giả sử $S=eRe\neq 0$, áp dụng ([4], Theorem 3.8) suy ra S là vành chính phương phải đầy đủ. Do đó, tồn tại hai iđêan phải khác không A, B của S sao cho $A\cong B$ và $A\cap B=0.$ Ta có, S là vành tự nội xạ phải nên $E(A)$ và $E(B)$ là hai hạng tử trực tiếp của S, do đó tồn tại các phần tử lũy đẳng $e_1, e_2 \in S$ sao cho $e_1S=E(A)$ và $e_2S=E(B)$. Ta có $e_1e_2\in e_1S\cap e_2S$ nên $e_1e_2=0$, suy ra $e_2\in r_S(e_1)=(1-e_1)S$, nên tồn tại $s_1\in S$ sao cho $e_2=(1-e_1)s_1$. Xét đồng cấu $\phi: e_1S\to(1-e_1)s_1S$ được xác định bởi $\phi(e_1s)=(1-e_1)s_1e_1s$. Đặt $\psi=i\phi\pi$ là đồng cấu với $\pi: S\to e_1S$ là toàn cấu chính tắc và $i:(1-e_1)s_1S\to S$ là đơn cấu chính tắc. Ta có $\psi(s)=i\phi(e_1s)=\phi(e_1s)=(1-e_1)s_1s,$ suy ra $\psi(\psi(s))=\phi(e_1(1-e_1)s_1s)=0, \forall s\in S.$ Do đó $\psi^2=0$, suy ra $\psi=0$. Như vậy, $\phi=0$ kéo theo $A=B=0$ (điều này mâu thuẫn). Chứng tỏ rằng $S=eRe=0.$ Do đó, R là vành không chính phương phải.

Hệ quả 2.25. *Nếu R là một fa-vành phải sao cho mọi phần tử lũy đẳng của R đều thuộc tâm của R thì R thỏa mãn tính chất trực tiếp- hữu hạn.*

Cuối cùng, chúng tôi có sơ đồ biểu diễn mối quan hệ giữa các lớp vành đã được chúng tôi giới thiệu ở trên:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{vành tự nội xạ} \arrow[r] & \text{vành bất biến đẳng cấu} \\
q-\text{vành} \arrow[r] \arrow[d] & fq-\text{vành} \arrow[r] \arrow[u] & fa-\text{vành} \arrow[u] \\
a-\text{vành} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Jain S.K. and Singh S. - Rings in which every right ideal is quasi-injective, Pacific J. Math. **31** (1969) 73-79.
2. Ivanov G. - On a generalisation of self-injective von Neumann regular rings, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996) 1051-1060.
3. Kosan M.T., Quynh T.C. and Srivastava A.K. - Rings with each right ideal automorphism-invariant, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016) 1525-1537.
4. Quynh T. C., Abyzov A.N., Trang D.T. - Rings all of whose finitely generated ideals are automorphism-invariant, Journal of Algebra and Its Applications (2022) 2250159, doi: 10.1142/S0219498822501596.
5. Goodearl K.R., Warfield R.B., Jr. - An introduction to noncommutative Noetherian rings, 2nd edition, London Mathematical Society Student Texts 61, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
6. Johnson R. E. and Wong E.T. - Quasi-injective modules and irreducible rings, J. Lond. Math. Soc. **36** (1961) 260-268.
7. Lee T.K. and Zhou Y.- Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra Appl. **12** (2013).
8. Er N., Singh S., Srivastava A.K. - Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls, J. Algebra **379** (2013) 223-229.

9. Guil Asensio P.A. and Srivastava A.K. - Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property, J. Algebra **388** (2013) 101-106.
10. Quynh T.C., Kosan M.T., Thuyet L.V. - On automorphism- invariant rings with chain conditions, Vietnam Journal of Mathematics (2019), doi: 10.1007/S10013-019-00336-8.

ABSTRACT

AN OVERVIEW OF THE CLASS OF INJECTIVE MODULES
AND ITS GENERALIZATIONS

Nguyen Quoc Tien*, Dao Thi Trang
Ho Chi Minh City University of Food Industry
*Email: *tiennq@hufi.edu.vn*

In this paper, we introduce to the class of injective modules and some its generalizations. We introduce to some related results of domestic and foreign studies and some our recent research results. The purpose of this paper is introduced to potential research directions in ring and module theory.

Keywords: Injective module, quasi-injective module, automorphism-invariant module.