Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/jvn.2017.010

TỐC ĐỘ HỘI TỤ TRONG ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN TRONG MỘT CHIỀU

Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận: 12/09/2016
Ngày chấp nhận: 28/04/2017

Title:
Rate of convergence in central limit theorem for random walk in one dimension

Từ khóa:
Bước đi ngẫu nhiên, định lý giới hạn trung tâm, tốc độ hội tụ

Keywords:
Central limit theorem, random walk, rate of convergence

ABSTRACT

In this paper, we study the model of random walk with state space $\mathbb{Z}$. We use the method of moments as in Depauw et al.'s paper (2009) and Lam Hoang Chuong's paper (2014) to prove that this random walk conveges in distribution to a normal law (Theorem 1.3) and give its rate also (Theorem 3.1). More precisely, with P be the corresponding Markov operator of the previous random walk and a given function f, we solve the Poisson equation $(P-I)g = f$ and then treat the limits of its solutions, the rate of the convergence is instantly given by the convergence of the moment of random walk.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu mô hình bước đi ngẫu nhiên với không gian trạng thái là tập $\mathbb{Z}$. Chúng tôi sử dụng phương pháp moments như trong bài báo của Depauw et al. (2009) và Lam Hoang Chuong (2014) để chứng minh sự hội tụ theo phân phối đến phân phối chuẩn của bước đi đang xét (Định lý 1.3) và đưa ra tốc độ hội tụ của nó (Định lý 3.1). Chi tiết hơn, với P là toán tử Markov tương ứng với bước đi ngẫu nhiên đang xét và hàm f cho trước, ta giải phương trình Poisson $(P-I)g = f$ rồi sau đó tìm giới hạn liên quan đến nghiệm của nó, khi đó tốc độ hội tụ sẽ được cho bởi sự hội tụ của các moment của bước đi.

Trích dẫn: Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba, 2017. Tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên trong một chiều. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 49a: 73-78.

1 GIỚI THIỆU

Ta xét một bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ trên $\mathbb{Z}$ có cường độ dịch chuyển sang phải hoặc sang trái 1 đơn vị là như nhau, hay còn gọi là bước đi ngẫu nhiên cân bằng trong một chiều. Khi đó, xác suất chuyển của nó tại vị trí bất kỳ $k \in \mathbb{Z}$ ở thời điểm $n \geq 0$ được cho bởi các biểu thức sau:

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k\} = 1/2,$$
$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k\} = 1/2. \tag{1.1}$$

Toán tử Markov tương ứng với bước đi ngẫu nhiên trên là $f \mapsto Pf$ được xác định bởi

$$Pf(k) = \frac{1}{2}\left[f(k-1) + f(k+1)\right], \tag{1.2}$$

với f là hàm đo được, bị chặn trên không gian trạng thái của bước đi là $\mathbb{Z}$. Hay nói cách khác, với mô hình của bước đi đang xét, ta luôn có

$$Pf(X_n) = \mathbb{E}\left[f(X_{n+1}) \mid X_n\right],$$

với mọi $n \geq 0$.

Mô hình bước đi ngẫu nhiên cân bằng là một quá trình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong thực tế. Nó là sự tăng thêm và mất đi một cá thể sau một thời điểm của quần thể nào đó, còn được gọi là quá trình sinh và chết trong sinh học nói chung. Trong kinh doanh, nó là sự sinh lợi và thua lỗ một lượng tài sản nhất định sau một "giao dịch". Khi ta xét trong vật lý động lực học, nó là sự "di chuyển" ngẫu nhiên của một chất điểm trên dây dẫn đồng chất. Trong lý thuyết trò chơi, đó là sự thắng và thua cuộc với xác suất như nhau, còn được gọi là trò chơi công bằng... Tất cả các mô hình áp dụng trên đều được xuất phát từ bài toán nói về sự di chuyển ngẫu nhiên của một *người say rượu* mà không còn khả năng phán đoán đường đi của mình.

Như chúng ta đã biết, trong mô hình bước đi ngẫu nhiên cân bằng thì mọi trạng thái của nó đều hồi quy, tức là nếu xuất phát từ một trạng thái ban đầu thì gần như chắc chắn quá trình sẽ quay lại trạng thái ban đầu đó. Về mặt toán học, ta luôn chứng minh được

$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X_n = k \mid X_0 = k) = +\infty$, với mọi trạng thái ban đầu $k \in \mathbb{Z}$. Các kết quả này được trình bày trong tài liệu của Norris (1998) và Ross (2010). Điều đó giải thích lý do tại sao sớm muộn gì thì các quần thể có cùng mô hình sẽ bị "tuyệt chủng", nhà kinh doanh sau một thời gian sẽ phá sản hay người chơi cờ bạc rồi cũng sẽ "nhẵn túi"….

Trong phạm vi bài báo này, chúng ta xét mô hình của một bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ cân bằng trên $\mathbb{Z}$ mà có trạng thái ban đầu $X_0 = 0$. Như đã phân tích ở trên, trạng thái 0 này sẽ hồi quy, nó thể hiện sự "tập trung" số lần lặp lại trạng thái này của bước đi. Nếu ta nhân thêm một hệ số chuẩn hóa thì hàm mật độ của nó sẽ ra dạng chuẩn khi số bước đi n đủ lớn, hay nói cách khác ta sẽ được một dạng của định lý giới hạn trung tâm với kỳ vọng bằng 0 và phương sai bằng 1. Ta phát biểu định lý đó như sau:

Định lý 1.3 *Với mọi bước đi ngẫu nhiên cân bằng* $(X_n)_{n\geq 0}$ *như trên, ta luôn có*

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1),$$

khi $n \to +\infty$. *Trong biểu thức trên,* $\xrightarrow{D}$ *ký hiệu cho hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên và* $\mathcal{N}(0,1)$ *là luật phân phối chuẩn tắc.*

Hơn nữa, mục tiêu chính của bài báo này không chỉ chứng minh Định lý 1.3 mà còn đưa ra tốc độ hội tụ cho nó.

Cấu trúc của bài báo được sắp xếp như sau. Mục 2 trình bày phương pháp chứng minh được sử dụng trong bài báo. Kết quả chính về tốc độ hội tụ cho Định lý 1.3 và chứng minh chi tiết của nó được đưa ra ở Mục 3. Cuối cùng là phần kết luận vấn đề ở Mục 4.

2 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong tài liệu của Billingsley (1995) có đề cập đến phương pháp moments để nghiên cứu định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất được trình bày lại như sau:

Định lý 2.1 (Billingsley, 1995) Cho $(Z_n)_{n\geq 1}$ và Z là các biến ngẫu nhiên cùng xác định trên một không gian xác suất. Nếu $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(Z_n^{\ell}\right) = \mathbb{E}\left(Z^{\ell}\right)$ với mọi $\ell = 1,2,3,\ldots$ thì Z_n hội tụ theo phân phối đến Z khi $n \to \infty$.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ dùng ký hiệu $\aleph$ là tập hợp các biến ngẫu nhiên mà có tất cả các moment của nó hữu hạn. Sau đó, ta định nghĩa một ánh xạ $\mathrm{d}: \aleph\times\aleph \to [0;+\infty]$ sao cho

$$\mathrm{d}(X,Y) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left|\mathbb{E}\left(X^{\ell} - Y^{\ell}\right)\right|. \tag{2.1}$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.1 Cho $(Z_n)_{n\geq 1}$ và Z thuộc tập $\aleph$. Nếu $\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(Z_n, Z) = 0$ thì Z_n hội tụ theo phân phối đến Z khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Từ công thức (2.1) ta có $\mathrm{d}(Z_n,Z) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left|\mathbb{E}\left(Z_n^{\ell} - Z^{\ell}\right)\right|$. Áp dụng giả thiết của bổ đề $\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}(Z_n,Z) = 0$ nên ta suy ra $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(Z_n^{\ell}\right) = \mathbb{E}\left(Z^{\ell}\right)$ với mọi $\ell = 1,2,3,\ldots$. Theo Định lý 2.1 ta được kết luận của Bổ đề 2.1.

Trong phần tiếp theo ta sẽ sử dụng ánh xạ d và Bổ đề 2.1 để tìm tốc độ hội tụ trong Định lý 1.3 với $Z_n = X_n/\sqrt{n}$ và $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3 KẾT QUẢ THỰC HIỆN

Với mô hình bước đi ngẫu nhiên cân bằng như đã giới thiệu ở Mục 1, ta có kết quả chính về tốc độ hội tụ đến phân phối chuẩn của nó như sau:

Định lý 3.1 *Ta có*

$\mathrm{d}\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}, X^*\right) = \mathrm{O}(n^{-1/2})$, *trong đó* X^* *là biến có phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng* 0 *và phương sai là 1.*

Ở đây, ta nhắc lại rằng một hàm $\beta(n) = O(\alpha(n))$ nếu như $\limsup_{n\to+\infty} |\alpha(n)/\beta(n)| < +\infty.$

Về tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm, trường hợp đơn giản nhất như ta đã biết là khi các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối (i.i.d) thì có bậc hội tụ là $\mathrm{O}(n^{-1/2})$. Trong mô hình ta đang xét thì bước đi là một xích Markov tổng quát hơn trường hợp i.i.d, là một dạng các biến phụ thuộc và cho kết quả cùng bậc hội tụ với trường hợp i.i.d.

Trước khi đi vào chứng minh kết quả trên, ta có các bổ đề cơ bản nhưng rất hữu ích sau:

Bổ đề 3.1 *Cho* u_n, v_n *là hai dãy số thực dương và một số nguyên không âm* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Giả sử rằng*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell = u > 0 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v > 0.$$

Nếu cả u *và* v *đều hữu hạn thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^{\alpha} u_\ell v_\ell = \frac{uv}{\alpha+1}. \tag{3.1}$$

Chứng minh. Với $\alpha = 0$, ta sẽ chỉ ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell v_\ell = uv.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell v_\ell - uv\right| &\le \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell (v_\ell - v)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} (u_\ell - u)v\right| \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell |v_\ell - v| + v\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} u_\ell - u\right| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ khi n đủ lớn. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta giả sử rằng (3.1) đúng cho $\alpha \ge 0$, ta mong muốn rằng nó cũng đúng cho $\alpha + 1$, tức là

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^{\alpha+1} u_\ell v_\ell = \frac{uv}{\alpha+2}.$$

Đặt $W_n = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^{\alpha} u_\ell v_\ell$, sử dụng phép biến đổi Abel ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^{\alpha+1} u_\ell v_\ell &= -\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1} W_\ell + \frac{1}{n^{\alpha+1}} W_n \\ &= -I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Theo giả thiết $\lim_{n\to\infty} I_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} W_n = \frac{uv}{\alpha+1}$, và ta có

$$\begin{aligned}\left|I_1 - \frac{uv}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right| &\le \frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^{\alpha+1}\left|\frac{W_\ell}{\ell^{\alpha+1}} - \frac{uv}{\alpha+1}\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right| \frac{uv}{\alpha+1} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

với mọi $\varepsilon > 0$ khi n đủ lớn bởi vì $\frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^{\alpha+1} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(\frac{\ell}{n}\right)^{\alpha+1}$ và cho n tiến tới vô cùng ta sẽ có giới hạn bằng $\int_0^1 x^{\alpha+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+2}$. Từ đó dẫn đến $\lim_{n\to\infty} I_1 = \frac{uv}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. Vì vậy,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^{\alpha+1} u_\ell v_\ell &= -\frac{uv}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{uv}{\alpha+1} \\ &= \frac{uv}{\alpha+2}\end{aligned}$$

và ta chứng minh được (3.1).

Bổ đề 3.2 Với một hàm $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cho trước, sẽ tồn tại duy nhất một hàm $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases} (P - I)\phi = \psi; \\ \phi(1) = a; \quad \phi(-1) = b. \end{cases} \tag{3.2}$$

Chứng minh. Ta có $(P - I)\phi(0) = \psi(0)$ suy ra

$$\phi(-1) + \phi(1) - 2\phi(0) = 2\psi(0).$$

Từ đó ta xác định được $\phi(0)$.

Với $m \geq 2$, ta xét $(P-I)\phi(m-1) = \psi(m-1)$. Nó tương đương với

$$\left[\phi(m)-\phi(m-1)\right] = \left[\phi(m-1)-\phi(m-2)\right] + 2\psi(m-1)$$

và bằng cách tính đệ quy theo m, ta được

$$\phi(m) = \phi(1) + \left[\phi(1)-\phi(0)\right]\sum_{\ell=1}^{m-1} 1 + \sum_{\ell=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{\ell} 2\psi(s).$$

Tương tự, với $m \leq -2$ ta có

$$\phi(m) = \phi(-1) + \left[\phi(-1)-\phi(0)\right]\sum_{\ell=2}^{-m} 1 + \sum_{\ell=2}^{-m}\sum_{s=1}^{\ell-1} 2\psi(-s).$$

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng ϕ là một nghiệm duy nhất của (3.2). Ta cũng kết luận được rằng nghiệm ϕ của phương trình Poisson $(P-I)\phi = \psi$ được đặc trưng bởi các giá trị của nó $\phi(-1)$, $\phi(0)$ và $\phi(1)$ mà thỏa mãn (3.2).

Ta bắt đầu chứng minh định lý 3.1. Xét một phân phối chuẩn $X^* \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, với mỗi $\ell = 1,2,3,\ldots$, ta có

$$\mathbb{E}\left\{X^{*\ell}\right\} = \begin{cases} 0 & khi \quad \ell = 2k-1 \\ \dfrac{(2k)!}{k!2^k} & khi \quad \ell = 2k. \end{cases}$$

Khi đó, với mỗi $\ell = 1,2,3,\ldots$ ta cần đánh giá tốc độ hội tụ của giới hạn của moment bậc ℓ của $X_n/\sqrt{n}$ khi $n \to \infty$.

Trường hợp moments bậc chẵn, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1 Với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(X_n/\sqrt{n}\right)^{2k} - X^{*2k}\right\}\right| = O(n^{-k}).$$

Chứng minh. Ta xét một dãy các hàm $f_k \geq 0$, xác định trên $\mathbb{Z}$, sao cho

$$\begin{cases} (P-I)f_k \equiv f_{k-1}, & k \geq 1 \\ f_0 \equiv 1 & \\ f_k(0) = 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Theo Bổ đề 3.2 ta có thể xác định hàm f_1 thỏa $f_1(-1) = 2$ và $f_1(1) = 0$

$$f_1(m) = \begin{cases} 2\sum_{\ell=1}^{m-1} \ell, & khi \quad m \geq 2 \\ 0, & khi \quad m = 0,1 \\ 2, & khi \quad m = -1 \\ 2\sum_{\ell=1}^{-m} \ell, & khi \quad m \leq -2 \end{cases}$$

và với $k \geq 2$ hàm f_k thỏa $f_k(1) = f_k(-1) = 0$

$$f_k(m) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{\ell} 2f_{k-1}(s), & khi \quad m \geq 2 \\ 0, & khi \quad m = -1,0,1 \\ \sum_{\ell=2}^{-m}\sum_{s=1}^{\ell-1} 2f_{k-1}(-s), & khi \quad m \leq -2. \end{cases}$$

Khi đó, với mọi số nguyên m và với $k \geq 1$ ta có

$$(P-I)f_k(m) = f_{k-1}(m).$$

Thay thế m bởi X_n và lấy kỳ vọng ta được

$$\mathbb{E}\left\{f_k(X_{n+1})\right\} = \mathbb{E}\left\{f_k(X_n)\right\} + \mathbb{E}\left\{f_{k-1}(X_n)\right\}$$

với mọi $n \geq 0$. Từ đó dẫn đến với mỗi $k \geq 1$ thì

$$\mathbb{E}\left\{f_k(X_n)\right\} \sim \frac{n^k}{k!} \tag{3.3}$$

khi n đủ lớn vì $f_k(0) = 0$ theo định nghĩa của f_k và $X_0 = 0$ theo giả thiết của bước đi ngẫu nhiên X_n. Biểu thức (3.3) được chứng minh bằng cách tính đệ quy theo k.

Biểu thức (3.3) có thể viết lại một cách hình thức như sau:

$$\mathbb{E}\left\{\frac{f_k(X_n)}{X_n^{2k}} \times \frac{X_n^{2k}}{n^k}\right\} \sim \frac{1}{k!}.$$

Ta sẽ thấy rằng $\lim_{m\to\infty} f_k(m)/m^{2k}$ tồn tại và từ đó dẫn đến giới hạn $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left\{X_n^{2k}/n^k\right\}$ cũng tồn tại.

Bước tiếp theo, ta sẽ tính giới hạn của $f_k(m)/m^{2k}$ bằng cách sử dụng Định lý 1.1 và Bổ đề 3.1.

Bổ đề 3.3 Cho $k \geq 1$, với hàm f_k được định nghĩa như trên thì

$$\lim_{m\to\pm\infty}\frac{f_k(m)}{m^{2k}}=\frac{2^k}{(2k)!}. \tag{3.4}$$

Trong phần tiếp theo ta sẽ ký hiệu giới hạn này là c_k.

Chứng minh. Giới hạn này đúng cho $k=1$. Thật vậy, với $m>0$ ta có

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_1(m)}{m^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{m^2}\frac{m(m-1)}{2}=1.$$

Giả sử rằng biểu thức (3.4) vẫn đúng cho $k\geq 1$, ta mong muốn nó cũng đúng cho $k+1$, tức là

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f_{k+1}(m)}{m^{2(k+1)}}=\frac{2^{k+1}}{(2k+2)!}.$$

Ta có

$$\frac{1}{\ell^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\ell}2f_k(s)=\frac{1}{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(\frac{s}{\ell}\right)^{2k}2\frac{1}{s^{2k}}f_k(s).$$

Áp dụng Bổ đề 3.1 và Định lý 1.1 cho $u_s=2, v_s=\frac{1}{s^{2k}}f_k(s)$ và $\alpha=2k$ thì biểu thức ở trên hội tụ đến $\frac{2^{k+1}}{(2k+1)!}$.

Mặt khác

$$\frac{f_{k+1}(m)}{m^{2(k+1)}}=\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m-1}\left(\frac{\ell}{m}\right)^{2k+1}\frac{1}{\ell^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\ell}1f_k(s).$$

Ta ta áp dụng Bổ đề 2.1 và Định lý 1.1 cho $u'_\ell=1,\ v'_\ell=\frac{1}{\ell^{2k+1}}\sum_{s=1}^{\ell}2f_k(s)$ và $\alpha=2k+1$ thì biểu thức ở trên hội tụ đến $\frac{2^{k+1}}{(2(k+1))!}$. Từ đó dẫn đến kết luận của (3.4).

Tương tự, ta có cùng kết quả cho trường hợp $m<0$.

Từ Bổ đề 3.3, với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $M>0$ sao cho với mọi $m>M$ thì ta có

$$\left|\frac{m^{2k}}{f_k(m)}-\frac{1}{c_k}\right|<\varepsilon/2. \tag{3.5}$$

Bây giờ ta chia tập giá trị của X_n ra làm hai phần $\{|X_n|\leq M\}\cup\{|X_n|>M\}$ và kết hợp với (3.3), (3.5) ta đánh giá biểu thức

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right\}-\frac{1}{k!c_k}\right|=\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}-\frac{1}{k!c_k}.\frac{f_k(X_n)}{n^k}\right\}\right|.$$

Nếu $\{|X_n|>M\}$ thì biểu thức ở trên có thể được viết lại là

$$\mathbb{E}\left\{\left|\frac{X_n^{2k}}{f_k(X_n)}-\frac{1}{c_k}\right|\frac{f_k(X_n)}{n^k}\right\}<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Nếu $\{|X_n|\leq M\}$ thì $f_k(X_n)<\infty$. Từ đó dẫn đến

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}-\frac{1}{k!c_k}.\frac{f_k(X_n)}{n^k}\right\}\right|<\frac{C_k}{n^k}$$

với C_k khi n đủ lớn. Như vậy, ta đi đến kết luận là

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}}\right)^{2k}\right\}-\frac{1}{k!c_k}\right|=O(n^{-k}),$$

khi n đủ lớn. Mệnh đề 3.1 đã được chứng minh.

Trường hợp moments bậc lẻ, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2 Với mỗi $k\geq 1$, ta có

$$\left|\mathbb{E}\left\{\left(X_n/\sqrt{n}\right)^{2k-1}\right\}\right|=O(n^{1/2-k}).$$

Chứng minh. Ta xét một dãy các hàm g_k, xác định trên $\mathbb{Z}$, sao cho

$$\begin{cases}(P-I)g_k\equiv g_{k-1}, & k\geq 1\\ g_0\equiv 0 & \\ g_k(0)=0, & k\geq 1.\end{cases}$$

Sử dụng Bổ đề 2.2 ta có thể xác định hàm g_1 thỏa $g_1(1)=1$ và $g_1(-1)=-1$ như sau:

$$g_1(m)=\begin{cases}\sum_{\ell=0}^{m-1}1, & khi \quad m\geq 1\\ 0, & khi \quad m=0\\ -\sum_{\ell=1}^{-m}1, & khi \quad m\leq -1\end{cases}$$

và với $k \geq 2$ hàm g_k thỏa $g_k(1) = g_k(-1) = 0$ như sau:

$$g_k(m) = \begin{cases} 2\sum_{\ell=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{\ell} g_{k-1}(s), & khi \quad m \geq 2 \\ 0, & khi \quad m = -1, 0, 1 \\ 2\sum_{\ell=2}^{-m} \sum_{s=1}^{\ell-1} g_{k-1}(-s), & khi \quad m \leq -2. \end{cases}$$

Khi đó, với mọi số nguyên m và với mỗi $k \geq 1$ ta có

$$(P - I)g_k(m) = g_{k-1}(m).$$

Dễ dàng thấy rằng với mỗi $k \geq 1$ thì

$$\mathbb{E}\{g_k(X_n)\} = 0 \tag{3.6}$$

với mọi $n \geq 0$.

Bổ đề 3.4 Với mỗi $k \geq 1$ và hàm g_k được xác định như trên, ta có

$$\lim_{m \to \pm\infty} \frac{g_k(m)}{m^{2k-1}} = \frac{2^{k-1}}{(2k-1)!}. \tag{3.7}$$

Trong phần tiếp theo, giới hạn này được ký hiệu là d_k.

Chứng minh. Tương tự như bổ đề 3.3.

Từ Bổ đề 3.4, với mọi $\varepsilon > 0$, sẽ tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $|m| > M$ thì

$$\left| \frac{g_k(m)}{m^{2k-1} d_k} - 1 \right| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Bây giờ ta chia tập giá trị của X_n ra làm hai phần $\{|X_n| \leq M\} \cup \{|X_n| > M\}$ và kết hợp với (3.6), (3.8) ta đánh giá biểu thức

$$\left| \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2k-1} \right\} \right| = \left| \mathbb{E}\left\{ \frac{1}{(\sqrt{n})^{2k-1}} \left(X_n^{2k-1} - \frac{g_k(X_n)}{d_k} \right) \right\} \right|.$$

Nếu $\{|X_n| > M\}$ thì biểu thức ở trên có thể được viết lại là

$$\mathbb{E}\left\{ \left(\frac{|X_n|}{\sqrt{n}} \right)^{2k-1} \left| 1 - \frac{g_k(X_n)}{X_n^{2k-1} d_k} \right| \right\} < \varepsilon \sqrt{\mathbb{E}\left\{ \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2(2k-1)} \right\}}$$

khi n đủ lớn. Nếu $\{|X_n| \leq M\}$ thì $g_k(X_n) < \infty$. Từ đó dẫn đến

$$\mathbb{E}\left\{ \frac{1}{(\sqrt{n})^{2k-1}} \left| X_n^{2k-1} - \frac{g_k(X_n)}{d_k} \right| \right\} < \frac{D_k}{n^{k-1/2}},$$

với D_k là hằng số dương. Theo Mệnh đề 3.1 thì biểu thức trong căn bậc hai sau cùng bị chặn nên ta đi đến kết luận là

$$\left| \mathbb{E}\left\{ \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2k-1} \right\} \right| = O(n^{1/2-k}) \text{ khi } n \text{ đủ lớn.}$$

Bậc hội tụ trong cả hai Mệnh đề 3.1 và 3.2 đều đúng với $k \geq 1$ nên khi chọn $k = 1$ thì ta sẽ có kết luận của Định lý 3.1. Như vậy, định lý chính về tốc độ hội tụ đã được chứng minh.

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã đánh giá được tốc độ hội tụ của định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên trên $\mathbb{Z}$ với bậc là $O(n^{-1/2})$ thông qua cách xác định ánh xạ *d* dựa vào phương pháp moment. Ngoài ra, điểm mấu chốt trong bài toán này ở chỗ ta có thể giải được phương trình Poisson tương ứng với toán tử Markov *P*. Chúng tôi kỳ vọng phương pháp này có thể được áp dụng cho các bài toán khác có liên quan.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Billingsley, P., 1995. Probability and measure, Third Edition. New York, 593 pages.

Depauw J., Derrien J. M., 2009. Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences Paris. 347: 401–406.

Lam Hoang Chuong, 2014. A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. Journal of Applied Probability. 51: 1051-1064.

Norris J. R., 1998. Markov chains. Cambridge University Press, 237 pages.

Ross S. M., 2010. Introduction to Probability Models. Elsevier Inc, 782 pages.