Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
website: sj.ctu.edu.vn

TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG MẠNH THEO NÓN LORENTZ

Lâm Quốc Anh[1], Nguyễn Hữu Danh[2] và Lê Minh Huy[1]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*

Thông tin chung:
Ngày nhận: 20/02/2016
Ngày chấp nhận: 24/05/2016

Title:
Upper semicontinuity of solution maps to the strong equilibrium problems involving Lorentz cone

Từ khóa:
Nón Lorentz, tính nửa liên tục trên, tính đóng, bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân

Keywords:
Lorentz cone, upper semicontinuity, closedness, equilibrium problem, variational inequality

ABSTRACT

In this paper, we consider the strong equilibrium problems involving Lorentz cone in metric space. Sufficient conditions for upper semicontinuity and closedness of the solution maps of these problems are established. We provide numerous examples to show that all the imposed assumptions are essential. As applications of the main results, the stability of solutions for the vector variational inequality problems involving Lorentz cone in metric space are derived.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xét các bài toán cân bằng mạnh theo nón Lorentz trong không gian mêtric. Các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên, tính đóng của ánh xạ nghiệm cho bài toán đang xét cũng được thiết lập. Chúng tôi đưa ra nhiều thí dụ để chỉ ra rằng tất cả các giả thiết đưa ra là tính cốt yếu. Ứng dụng các kết quả đạt được vào bài toán bất đẳng thức biến phân theo nón Lorentz cũng được thảo luận.

Trích dẫn: Lâm Quốc Anh, Nguyễn Hữu Danh và Lê Minh Huy, 2016. Tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng mạnh theo nón Lorentz. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 43a: 26-33.

1 MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng đã được giới thiệu vào năm 1994 (xem Blum and Oettli, 1994), trong đó, các tác giả xem bài toán này là dạng tổng quát của bài toán tối ưu và bài toán bất đẳng thức biến phân. Về sau các nhà toán học đã chỉ ra rằng bài toán cân bằng còn chứa được rất nhiều bài toán quan trọng khác của tối ưu hóa như: bài toán điểm bất động, bài toán điểm trùng, bài toán mạng giao thông, bài toán cân bằng Nash,… Các chủ đề chính nghiên cứu về bài toán cân bằng bao gồm sự tồn tại nghiệm (Ansari *et al.,* 2001; Fu and Wan, 2002), tính ổn định nghiệm (Anh and Khanh, 2007, 2010, Bianchi and Pini, 2003), sự đặt chỉnh (Anh *et al.*, 2009, 2012, 2014, Kimura *et al.*, 2008) và các thuật toán tìm nghiệm (Anh *et al.*, 2015, Bigi *et al.*, 2013, Iusem and Sosa, 2010, Quoc *et al.*, 2012, Muu and Quy, 2015) và các tài liệu tham khảo trong đó.

Một trong những nón mà có nhiều ứng dụng trong các trường hợp thực tế và dành được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong thời gian gần đây là nón Lorentz trong không gian $\mathbb{R}^n$. Các bài toán có liên quan đến tối ưu theo nón Lorentz đã được tập trung nghiên cứu, nhưng hầu hết là về sự tồn tại nghiệm và thuật toán giải (Chi and Liu, 2009, Fang *et al.*, 2009, Dong *et al.*, 2012, Pedro and Alberto, 2012, Wu and Chen, 2012 và các tài liệu tham khảo trong đó). Theo những gì chúng tôi biết, cho đến nay chưa có bài báo nào nghiên cứu tính ổn định nghiệm cho bài toán cân bằng theo nón Lorentz.

Từ những quan sát trên, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng theo nón Lorentz phụ thuộc tham số theo nghĩa tính nửa liên tục trên và tính đóng của ánh xạ nghiệm. Áp dụng các kết quả đạt được vào bài toán bất đẳng thức biến phân như là một thí dụ ứng dụng minh họa.

Bài báo có cấu trúc như sau: Mục 2 trình bày khái niệm nón Lorentz và các tính chất của nó, đồng thời cũng đề cập đến các khái niệm và tính chất của ánh xạ liên tục theo nghĩa đơn trị và đa trị. Trong Mục 3, chúng tôi nghiên cứu các điều kiện đủ cho ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng theo nón Lorentz phụ thuộc tham số là nửa liên tục trên và đóng trong trường hợp tập ràng buộc không phụ thuộc tham số. Mục 4 xét bài toán cân bằng theo nón Lorentz với cả hàm mục tiêu và tập ràng buộc đều phụ thuộc tham số, thiết lập điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên và tính đóng của ánh xạ nghiệm cho bài toán dạng này. Ứng dụng các kết quả đạt được trong các Mục 3 và 4 vào trường hợp đặc biệt, bài toán bất đẳng thức biến phân, được trình bày trong Mục 5. Mục 6 đưa ra các nhận xét về kết quả đạt được và một số định hướng nghiên cứu phát triển từ các kết quả chính của bài báo.

2 NÓN LORENTZ

Định nghĩa 2.1 Cho tập $K \subset \mathbb{R}^n$, khi đó K được gọi là nón nếu với mọi $x \in K$ và với mọi $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ thì ta luôn có $\alpha x \in K$.

Chú ý

(i) Nón K được gọi là nón rắn nếu int $K \neq \emptyset$.

(ii) K được gọi là nón lồi nếu K là nón và K là tập lồi.

(iii) K được gọi là nón đóng nếu K là nón và K là tập đóng.

(iv) Nón đối ngẫu của nón K là tập $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \geq 0, \forall x \in K\}$, trong đó

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,; x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Xét tập $\mathbb{L}_n$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ được xác định như sau:

$$\mathbb{L}_n \coloneqq \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \right\}.$$

Tính chất 2.1 $\mathbb{L}_n$ là nón lồi, đóng và tự đối ngẫu.

Chứng minh

Dễ thấy rằng $\mathbb{L}_n$ là nón, ta chứng minh $\mathbb{L}_n$ là nón lồi. Thật vậy,
lấy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{L}_n$ và $\alpha \in [0,1]$. Ta có

$$x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2},$$
$$y_n \geq \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2}. \quad (2.1)$$

Xét $\alpha x + (1-\alpha) y = (\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1, \alpha x_2 + (1-\alpha) y_2, \dots, \alpha x_n + (1-\alpha) y_n)$. Khi đó kết hợp (2.1) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$(\alpha x_n + (1-\alpha) y_n)^2 = \alpha^2 x_n^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_n y_n + (1-\alpha)^2 y_n^2 \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$
$$+ 2\alpha(1-\alpha) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2} \right)$$
$$+ (1-\alpha)^2 (\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2) \geq \alpha^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$
$$+ 2\alpha(1-\alpha)(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i) + (1-\alpha)^2 (\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2)$$
$$= (\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1)^2 + \cdots + (\alpha x_{n-1} + (1-\alpha) y_{n-1})^2.$$

Do đó,

$$\alpha x_n + (1-\alpha) y_n \geq \sqrt{(\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1)^2 + \cdots + (\alpha x_{n-1} + (1-\alpha) y_{n-1})^2}.$$

Vậy, $\alpha x + (1-\alpha) y \in \mathbb{L}_n$, hay $\mathbb{L}_n$ là nón lồi.
Ta chứng minh $\mathbb{L}_n$ là nón đóng. Thật vậy, lấy $\{x^k\} \subset \mathbb{L}_n$ với $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ thỏa mãn

$$x_n^k \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}.$$

Giả sử $\lim_{k \to \infty} x^k = x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó $\lim_{k \to \infty} x_i^k = x_i^0, i = \overline{1, n}$. Do tính liên tục của giới hạn nên ta lấy giới hạn hai vế bất đẳng thức trên ta được

$x_n^0 \geq \sqrt{(x_1^0)^2 + \cdots + (x_{n-1}^0)^2}$, nên ta có $x_0 \in \mathbb{L}_n$. Vậy $\mathbb{L}_n$ là nón đóng.

Ta chứng minh $\mathbb{L}_n$ là nón tự đối ngẫu, tức là $\mathbb{L}_n = (\mathbb{L}_n)^*$. Thật vậy,

$\mathbb{L}_n \subset (\mathbb{L}_n)^*$ vì $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{L}_n$, $\forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{L}_n$ thì

$x_n \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}$ và $y_n \geq \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}$.

Khi đó,
$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= y_1x_1 + \cdots + y_{n-1}x_{n-1} + y_nx_n \\ &\geq y_1x_1 + \cdots + y_{n-1}x_{n-1} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}.\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \\ &\geq (y_1x_1 + \cdots + y_{n-1}x_{n-1}) + |y_1x_1 + \cdots + y_{n-1}x_{n-1}| \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Suy ra, $x \in (\mathbb{L}_n)^*$.

Ta chứng minh $(\mathbb{L}_n)^* \subset \mathbb{L}_n$.

Lấy $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in (\mathbb{L}_n)^*, y_n > 0$. Giả sử $y \notin \mathbb{L}_n$ tức là

$$y_n < \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}.$$

Đặt $x = (\overline{x}, y_n) \in \mathbb{R}^n$, trong đó

$$\overline{x} = -\frac{y_n}{\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}}(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Khi đó, $\overline{x}^2 = \langle \overline{x}, \overline{x}\rangle = y_n^2$, nên ta suy ra $x = (\overline{x}, y_n) \in \mathbb{L}_n$.

Theo định nghĩa đối ngẫu, vì $x = (\overline{x}, y_n) \in \mathbb{L}_n$ nên ta có,

$$0 \leq \langle x, y\rangle = -\frac{y_n}{\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}}(y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2) + y_n^2 < -y_n^2 + y_n^2 = 0,$$

điều này vô lý, và do đó $y \in \mathbb{L}_n$. Suy ra $y \in \mathbb{L}_n$ hay $(\mathbb{L}_n)^* \subset \mathbb{L}_n$.

Vậy $\mathbb{L}_n$ là nón tự đối ngẫu. ■

Tính chất 2.2

(i) Nón $\mathbb{L}_n$ là nón có phần trong khác rỗng và phần trong là tập hợp

$\text{int}(\mathbb{L}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\}$.

(ii) Biên của $\mathbb{L}_n$ là tập hợp

$\text{bd}(\mathbb{L}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\}$.

Chứng minh

Xét hàm $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = \sqrt{2}x_n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, dễ thấy f là hàm tuyến tính liên tục và nón $\mathbb{L}_n$ có thể được viết lại như sau:

$$\mathbb{L}_n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq \|x\|\}.$$

Xét hàm $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định $\varphi(x) = f(x) - \|x\|$. Rõ ràng φ là hàm liên tục và thỏa mãn $\mathbb{L}_n = \varphi^{-1}([0, \infty))$.

Lấy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\|x_0\| = 1$ và $f(x_0) > 1$. Rõ ràng $x_0 \in \mathbb{L}_n$ và $\varphi(x_0) > 0$. Suy ra $x_0 \in \varphi^{-1}((0, \infty))$ (tập con lồi của $\mathbb{L}_n$) khác rỗng nên $\mathbb{L}_n$ có phần trong khác rỗng. Hơn nữa, phần trong của $\mathbb{L}_n$ chính là tập lồi mở

$\{x \in \mathbb{R}^{n} | f(x) > \|x\| \} = \varphi$^(−1) $((0, \infty))$.

Do đó,

$$\text{int}(\mathbb{L}_n) = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\}.$$

Nếu $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $f(x) = \|x\|$ thì x không là điểm trong của $\mathbb{L}_n$. Thật vậy, nếu x là điểm trong của $\mathbb{L}_n$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\|y\| < \delta$ ta có,

$$\begin{aligned}f(x) + f(y) = f(x + y) \geq \|x + y\| &\geq \|x\| - \|y\| \\ &= f(x) - \|y\|,\end{aligned}$$

nên ta suy ra $f(y) \geq -\|y\|$. Mà $f(y) \leq \|y\|$ với mọi $\|y\| < \delta$.

Suy ra $|f(y)| \leq \|y\|$ với mọi $y \in \mathbb{L}_n$, và do đó $\|f\| \leq 1$ (vô lý).

Biên của $\mathbb{L}_n$ được xác định như sau:

$$\text{bd}(\mathbb{L}_n) = \mathbb{L}_n \backslash \varphi^{-1}\big((0, \infty)\big) = \varphi^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \varphi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \|x\|\}.$$

Vậy

$$\text{bd}(\mathbb{L}_n) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| x_n = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right\}.$$ ■

Nón $\mathbb{L}_n$ trong $\mathbb{R}^n$ như trên còn được gọi là nón Lorentz.

Nếu $n = 1$, $\mathbb{L}_1$ là tập hợp các số thực không âm $\mathbb{R}_+$.

Nếu $n \geq 2$, $\mathbb{L}_n$ là nón xoay nhận nửa trục dương thứ n làm trục trung tâm của nón.

Quan hệ thứ tự trên nón Lorentz được xác định như sau:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \geq_{\mathbb{L}_n} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{L}_n,$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x >_{\mathbb{L}_n} y \Leftrightarrow x - y \in \text{int}\, \mathbb{L}_n.$$

Quan hệ thứ tự này không toàn phần. Thí dụ với $n = 2$, cho $x = (2,2)$, $y = (0,1) \in \mathbb{L}_2$. Nhưng $x - y = (2,1) \notin \mathbb{L}_2$.

Sau đây, ta nhắc lại một số khái niệm về tính nửa liên tục của ánh xạ đa trị và đơn trị.

Định nghĩa 2.2 (Aubin and Frankowska, 1990) Cho $Q: X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị giữa hai không gian mêtric.

(i) Q được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $Q(x_0) \subseteq U$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \subset U$ với mọi $x \in N$.

(ii) Q được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $Q(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$.

(iii) Q được gọi là *đóng* tại x_0 nếu $grQ \coloneqq \{(x,y) \in X \times Y | y \in Q(x)\}$ là tập đóng.

Mệnh đề 2.1 (Aubin and Frankowska, 1990)

(i) Q là ánh xạ nửa liên tục dưới tại x_0 nếu và chỉ nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ và mọi điểm $y \in Q(x_0)$ tồn tại một dãy $\{y_n\}$ với $y_n \in Q(x_n)$ sao cho $y_n \to y$.

(ii) Nếu $Q(x_0)$ là compact, khi đó Q là ánh xạ nửa liên tục trên tại x_0 nếu và chỉ nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ bất kỳ hội tụ về x_0, mỗi dãy $\{y_n\}$ thỏa $y_n \in Q(x_n)$ có một dãy con hội tụ về một điểm nào đó trong $Q(x_0)$.

Định nghĩa 2.3 (Aubin and Frankowska, 1990) Cho hàm thực mở rộng $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(i) f được gọi là *nửa liên tục trên* (viết tắt là usc) tại $x_0 \in X$ nếu với mọi $\{x_n\} \subseteq X, x_n \to x_0$ thì $f(x_0) \geq \limsup f(x_n)$.

(ii) f được gọi là *nửa liên tục dưới* (viết tắt là lsc) tại $x_0 \in X$ nếu với mọi $\{x_n\} \subseteq X, x_n \to x_0$ thì $f(x_0) \leq \liminf f(x_n)$.

(iii) f được gọi là *liên tục* tại $x_0 \in X$ nếu f nửa liên tục dưới và nửa liên tục trên tại x_0.

Ta nói rằng một ánh xạ thỏa mãn tính chất nào đó trong tập $A \subseteq X$ nếu nó thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của A. Nếu $A = X$ thì ta bỏ qua cụm từ "trong X" trong cách phát biểu.

3 TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM TRONG TRƯỜNG HỢP TẬP RÀNG BUỘC KHÔNG ĐỔI

Trong bài báo này nếu không có giả thiết gì thêm, chúng ta xét X, Λ và M là các không gian mêtric. Xét $K \subseteq X$ là tập con không rỗng, và hàm giá trị vectơ

$F = (F_1, F_2, \dots, F_n): K \times K \times M \to \mathbb{R}^n$, trong đó $F_i: K \times K \times M \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$. Với mỗi $\mu \in M$ ta xét bài toán cân bằng vectơ phụ thuộc tham số theo nón Lorentz sau đây.

(LEP$_\mu$): Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho,

$F(\bar{x}, y, \mu) \in \mathbb{L}_n$ với mọi $y \in K$.

Với mỗi $\mu \in M$ ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán là S(μ), khi đó ánh xạ nghiệm $S(\mu)$ của (LEP$_\mu$) là một ánh xạ đa trị từ M vào X được xác định
như sau:

$$S(\mu) \coloneqq \{x \in K | F(x, y, \mu) \in \mathbb{L}_n, \forall y \in K\}.$$

Giả sử rằng tập nghiệm $S(\mu_0) \neq \emptyset$ tại điểm đang xét μ_0. Để đơn giản trong cách trình bày, ta chỉ xét với $n = 2$ vì trong trường hợp tổng quát các kết quả thu được bằng kỹ thuật tương tự.

Định lý 3.1 *Xét bài toán (LEP_μ), giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) *K là tập compact,*

(ii) *$F_i(\cdot, y, \cdot), i = 1, 2$ liên tục với mọi $y \in K$.*

Khi đó, S nửa liên tục trên và đóng.

Chứng minh

Giả sử rằng S không nửa liên tục trên trên M, nghĩa là $\exists\, \mu_0 \in M$ để S không nửa liên tục trên tại μ_0. Khi đó, tồn tại một lân cận U của $S(\mu_0)$ sao cho tồn tại $\mu_n \to \mu_0$ và $x_n \in S(\mu_n)$ nhưng $x_n \notin U, \forall n$. Do K compact nên ta có thể giả sử $x_n \to x_0$, với $x_0 \in K$ (nếu cần ta có thể lấy dãy con). Nếu $x_0 \notin S(\mu_0)$ thì tồn tại $y_0 \in K$ sao cho

$$F_2(x_0, y_0, \mu_0) < \sqrt{[F_1(x_0, y_0, \mu_0)]^2}. \quad (3.1)$$

Do tính liên tục của F_i nên $F_i(x_n, y_0, \mu_n) \to F_i(x_0, y_0, \mu_0), i = 1,2$. Vì $x_n \in S(\mu_n)$, nên ta có

$$F_2(x_n, y_0, \mu_n) \geq \sqrt{[F_1(x_n, y_0, \mu_n)]^2}, \forall y_0 \in K.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} F_2(x_0, y_0, \mu_0) &= \lim F_2(x_n, y_0, \mu_n) \\ &\geq \lim \sqrt{[F_1(x_n, y_0, \mu_n)]^2} \\ &= \sqrt{[F_1(x_0, y_0, \mu_0)]^2}, \end{aligned}$$

(mâu thuẫn với (3.1)). Vì vậy $x_0 \in S(\mu_0) \subset U$, điều này lại mâu thuẫn với $x_n \notin U, \forall n$.

Do đó, S nửa liên tục trên tại μ_0, ta suy ra S nửa liên tục trên trên M.

Hơn nữa, với mỗi dãy $\mu_n \to \mu_0$ và $x_n \in S(\mu_n), x_n \to x_0$. Lập luận tương tự như trên, ta cũng có $x_0 \in S(\mu_0)$ hay S đóng. Vậy S nửa liên tục trên và đóng trên M. ■

Các thí dụ sau minh họa sự cốt yếu của những giả thiết trong định lý trên.

Thí dụ 3.1 (Tính compact trong giả thiết (i) là cốt yếu)

Cho $X = \mathbb{R}, M = [0,1]$, $K = (0,1]$ và $F(x, y, \mu) = (F_1(x, y, \mu), F_2(x, y, \mu))$, trong đó

$F_1(x, y, \mu) = \mu x + y$ và $F_2(x, y, \mu) = \mu y + x$.

Rõ ràng K không là tập compact. Giả thiết (ii) thỏa mãn vì F_1, F_2 liên tục.

Tính toán trực tiếp ta được

$$S = \begin{cases} \{1\}, & \text{nếu } \mu \in [0,1), \\ (0,1], & \text{nếu } \mu = 1. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng S không nửa liên tục trên tại $\mu_0 = 0$ nguyên nhân là vì K không là tập compact.

Thí dụ 3.2 (Giả thiết (ii) là cần thiết)

Cho $X = \mathbb{R}, M = [0,1], K = [0,1]$,

$F(x, y, \mu) = (F_1(x, y, \mu), F_2(x, y, \mu))$ trong đó

$$F_1(x, y, \mu) = \begin{cases} y, & \text{nếu } \mu = 0 \\ \mu x, & \text{nếu } \mu \neq 0 \end{cases} \quad \text{và}$$

$$F_2(x, y, \lambda) = \begin{cases} x, & \text{nếu } \mu = 0, \\ \mu y, & \text{nếu } \mu \neq 0. \end{cases}$$

Ta thấy K là tập compact và

$$S = \begin{cases} \{1\}, & \text{nếu } \mu = 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } \mu \neq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng S không nửa liên tục trên tại $\mu_0 = 0$ vì $F_i, i = 1,2$ không liên tục tại 0. Thật vậy,

với $x_n = 0, y = 1, \mu_n = \frac{1}{n}$ ta có $\lim_{n\to\infty} F_1(x_n, y, \mu_n) = 0 \neq 1 = F_1(0,1,0)$,

với $x_n = 1, y = 0, \mu_n = \frac{1}{n}$ ta có $\lim_{n\to\infty} F_2(x_n, y, \mu_n) = 0 \neq 1 = F_2(1,0,0)$.

4 TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM TRONG TRƯỜNG HỢP TẬP RÀNG BUỘC PHỤ THUỘC THAM SỐ

Xét $A \subseteq X$ là tập con không rỗng, $K: \Lambda \to 2^A$ là ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng và hàm giá trị vectơ

$F = (F_1, F_2, \ldots, F_n): A \times A \times M \to \mathbb{R}^n$,

trong đó $F_i: A \times A \times M \to \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$ và $\mu \in M$ ta xét bài toán cân bằng vectơ phụ thuộc tham số theo nón Lorentz sau đây:

($\mathrm{LEP}_{\lambda,\mu}$): Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho,

$F(\bar{x}, y, \mu) \in \mathbb{L}_n$ với mọi $y \in K(\lambda)$.

Với mỗi $\lambda \in \Lambda, \mu \in M$ ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán là $S(\lambda, \mu)$, khi đó ánh xạ nghiệm $S(\lambda, \mu)$ của ($\mathrm{LEP}_{\lambda,\mu}$) là một ánh xạ đa trị từ $\Lambda \times M$ vào X được xác định

$$S(\lambda, \mu) \coloneqq \{x \in K(\lambda) | F(x, y, \mu) \in \mathbb{L}_n, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Vì mục đích nghiên cứu của bài báo này là nghiên cứu tính ổn định của ánh xạ nghiệm nên ta luôn giả sử rằng tập nghiệm $S(\lambda_0, \mu_0) \neq \emptyset$ tại điểm đang xét (λ_0, μ_0). Để đơn giản trong cách trình bày, ta cũng xét với $n = 2$.

Định lý 4.1 *Xét bài toán* ($\mathrm{LEP}_{\lambda,\mu}$)*, giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) *$K(\lambda_0)$ là tập compact,*

(ii) *$F_i(\cdot, y, \mu), i = 1,2$ liên tục với mọi $y \in K(\lambda_0), \mu \in M$.*

Khi đó, $S(\lambda_0, \mu_0)$ là tập compact.

Chứng minh

Ta chứng minh $S(\lambda_0, \mu_0)$ là tập đóng. Thật vậy, với mỗi $x_n \in S(\lambda_0, \mu_0), x_n \to x_0$. Nếu $x_0 \notin S(\lambda_0, \mu_0)$ thì tồn tại $y_0 \in K(\lambda_0)$ sao cho

$$F_2(x_0, y_0, \mu_0) < \sqrt{[F_1(x_0, y_0, \mu_0)]^2}. \quad (4.1)$$

Vì $x_n \in S(\lambda_0, \mu_0)$, nên ta có

$$F_2(x_n, y_0, \mu_0) \geq \sqrt{[F_1(x_n, y_0, \mu_0)]^2}.$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} F_2(x_0, y_0, \mu_0) &= \lim F_2(x_n, y_0, \mu_0) \\ &\geq \lim \sqrt{[F_1(x_n, y_0, \mu_0)]^2} \\ &= \sqrt{[F_1(x_0, y_0, \mu_0)]^2}. \end{aligned}$$

(mâu thuẫn với (4.1)), và do đó $x_0 \in S(\lambda_0, \mu_0)$, hay $S(\lambda_0, \mu_0)$ là tập đóng trong tập $K(\lambda_0)$ compact. Vậy $S(\lambda_0, \mu_0)$ là tập compact. ■

Định lý 4.2 *Xét bài toán* (LEP$_{\lambda,\mu}$)*, giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) *K liên tục tại λ_0 và $K(\lambda_0)$ là tập compact,*

(ii) *$F_i, i = 1, 2$ liên tục trong $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{\mu_0\}$.*

Khi đó, S nửa liên tục trên và đóng tại (λ_0, μ_0).

Chứng minh

Giả sử rằng S không nửa liên tục trên tại (λ_0, μ_0). Khi đó, tồn tại một lân cận U của $S(\lambda_0, \mu_0)$ sao cho có dãy $\lambda_n \to \lambda_0$, $\mu_n \to \mu_0$ và $x_n \in S(\lambda_n, \mu_n)$ nhưng $x_n \notin U, \forall n$. Do tính nửa liên tục trên của K và tính compact của $K(\lambda_0)$, nên tồn tại $x_0 \in K(\lambda_0)$ sao cho $x_n \to x_0$. Nếu $x_0 \notin S(\lambda_0, \mu_0)$ thì tồn tại $y_0 \in K(\lambda_0)$ sao cho

$$F_2(x_0, y_0, \mu_0) < \sqrt{[F_1(x_0, y_0, \mu_0)]^2}. \quad (4.2)$$

Do tính nửa liên tục dưới của K tại giá trị λ_0 nên tồn tại $y_n \in K(\lambda_n), y_n \to y_0$. Vì $x_n \in S(\lambda_n, \mu_n)$, nên ta có

$$F_2(x_n, y_n, \mu_n) \geq \sqrt{[F_1(x_n, y_n, \mu_n)]^2}.$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} F_2(x_0, y_0, \mu_0) &= \lim F_2(x_n, y_n, \mu_n) \\ &\geq \lim \sqrt{[F_1(x_n, y_n, \mu_n)]^2} \\ &= \sqrt{[F_1(x_0, y_0, \mu_0)]^2}, \end{aligned}$$

(mâu thuẫn với (4.2)). Vì vậy $x_0 \in S(\lambda_0, \mu_0) \subset U$, điều này lại mâu thuẫn với $x_n \notin U, \forall n$.

Vậy S nửa liên tục trên tại (λ_0, μ_0).

Hơn nữa, với mỗi dãy $\lambda_n \to \lambda_0, \mu_n \to \mu_0$ và $x_n \in S(\lambda_n, \mu_n), x_n \to x_0$. Lập luận tương tự như trên, ta cũng có $x_0 \in S(\lambda_0, \mu_0)$ hay S đóng tại (λ_0, μ_0). ■

Các thí dụ sau minh họa sự cốt yếu của những giả thiết trong định lý trên.

Thí dụ 4.1 (Tính nửa liên tục trên và tính compact trong giả thiết (i) là cốt yếu)

Cho $X = \mathbb{R}, A = \Lambda = M = [0,1], \lambda_0 = 0$,

$$K(\lambda) = \begin{cases} \{0\}, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ (0,1], & \text{nếu } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

và $F(x, y, \lambda) = (F_1(x, y, \lambda), F_2(x, y, \lambda))$, trong đó

$$F_1(x, y, \lambda) = \tfrac{\lambda}{2} y \text{ và } F_2(x, y, \lambda) = \lambda(x - \tfrac{1}{2} y).$$

Dễ thấy rằng K nửa liên tục dưới tại 0. Giả thiết (ii) thỏa mãn vì F_1, F_2 là các hàm liên tục.

Ta có,

$$S = \begin{cases} \{0\}, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \{1\}, & \text{nếu } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng S không nửa liên tục trên tại $\lambda_0 = 0$ nguyên nhân là K không nửa liên tục trên và không compact tại $\lambda_0 = 0$.

Thí dụ 4.2 (Tính nửa liên tục dưới của giả thiết (i) là cốt yếu)

Cho $X = \mathbb{R}, A = [0,1], \Lambda = M = [0, +\infty), \lambda_0 = 0$,

$$K(\lambda) = \begin{cases} [0,1], & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right], & \text{nếu } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

và $F(x, y, \lambda) = (F_1(x, y, \lambda), F_2(x, y, \lambda))$, trong đó $F_1(x, y, \lambda) = e^{\lambda} x + x + y$ và $F_2(x, y, \lambda) = e^{\lambda} y + x + y$.

Ta thấy K nửa liên tục trên nhưng không nửa liên tục dưới tại 0. Giả thiết (ii) thỏa vì F_1, F_2 là các hàm liên tục.

Ta có

$$S = \begin{cases} \{0\}, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \left\{\frac{1}{2}\right\}, & \text{nếu } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được S không nửa liên tục trên tại $\lambda_0 = 0$. Nguyên nhân là do K không nửa liên tục dưới tại $\lambda_0 = 0$.

Thí dụ 4.3 (Giả thiết (ii) không thể bỏ được)

Cho $X = \mathbb{R}$, $A = \Lambda = M = [0,1]$, $K(\lambda) \equiv [0,1]$ $F(x, y, \lambda) = (F_1(x, y, \lambda), F_2(x, y, \lambda))$ trong đó

$$F_1(x, y, \lambda) = \begin{cases} ey, & \text{nếu } \lambda = 0 \\ \lambda x, & \text{nếu } \lambda \neq 0 \end{cases} \text{ và}$$

$$F_2(x, y, \lambda) = \begin{cases} ex, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \lambda y, & \text{nếu } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Ta thấy, K liên tục tại $\lambda_0 = 0, K(0)$ compact. Ta tính toán được

$$S = \begin{cases} \{1\}, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, S không nửa liên tục trên tại $\lambda_0 = 0$ nguyên nhân là các hàm $F_i, i = 1,2$ không liên tục tại 0. Thật vậy, với $x_n = 1, y_n = 1, \lambda_n = \frac{1}{n}$ ta có

$\lim_{n\to\infty} F_1(x_n, y_n, \lambda_n) = 0 \neq e = F_1(1,1,0)$, với $x_n = 1, y_n = 1, \lambda_n = \frac{1}{n}$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} F_2(x_n, y_n, \lambda_n) = 0 \neq e = F_2(1,1,0).$$

Chú ý: Khi xét tập ràng buộc K phụ thuộc vào tham số $\lambda \in \Lambda$ thì các hàm F_1, F_2 phải liên tục theo tất cả các biến. Thí dụ sau chỉ ra rằng giả thiết (ii) trong Định lý 4.2 không được giảm nhẹ thành giả thiết (ii) trong Định lý 3.1.

Thí dụ 4.4

Cho $X = \mathbb{R}$, $A = \Lambda = M = [0,1], K(\lambda) \equiv [0,1]$ $F(x,y,\lambda) = (F_1(x,y,\lambda), F_2(x,y,\lambda))$ trong đó

$$F_1(x,y,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \lambda y = 0, \\ \lambda \dfrac{\sin y}{y} + 1, & \text{nếu } \lambda y \neq 0, \end{cases}$$

$$F_2(x,y,\lambda) = \begin{cases} x, & \text{nếu } \lambda y = 0, \\ \lambda \dfrac{\sin y}{y} + \lambda x + x, & \text{nếu } \lambda y \neq 0. \end{cases}$$

Ta thấy, K liên tục tại $\lambda_0 = 0, K(0)$ compact. Tính toán trực tiếp ta được

$$S = \begin{cases} \{1\}, & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \left[\frac{1}{1+\lambda}, 1\right), & \text{nếu } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, S không nửa liên tục trên tại $\lambda_0 = 0$ vì $F_i, i = 1,2$ liên tục theo biến x và λ nhưng không liên tục theo biến y.

Thật vậy, với $x_n = 1, y_n = \frac{1}{n}, \lambda_n = 1$ ta có $\lim_{n\to\infty} F_1(x_n, y_n, \lambda_n) = 2 \neq 1 = F_1(1,0,1)$.

Với $x_n = 1, y_n = \frac{1}{n}, \lambda_n = 1$ ta có $\lim_{n\to\infty} F_2(x_n, y_n, \lambda_n) = 3 \neq 1 = F_2(1,0,1)$.

5 ỨNG DỤNG

Cho X, Λ, M là không gian định chuẩn, $A \subseteq X$ là tập con không rỗng, $K: \Lambda \to 2^A$, X^* là không gian đối ngẫu của A và

$$h_i: X \times M \to X^*, i = 1,2.$$

Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân sau:

$(\mathrm{LVI}_{\lambda,\mu})$: Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho

$$(\langle h_1(\bar{x},\mu), y - \bar{x}\rangle, \langle h_2(\bar{x},\mu), y - \bar{x}\rangle) \geq_{\mathbb{L}_2} 0, \forall y \in K(\lambda).$$

Xét hàm $F: A \times A \times M \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau:

$F(x,y,\mu) = (F_1(x,y,\mu), F_2(x,y,\mu)) = (\langle h_1(x,\mu), y - x\rangle, \langle h_2(x,\mu), y - x\rangle)$. Khi đó bài toán $(\mathrm{LVI}_{\lambda,\mu})$ là trường hợp đặc biệt của bài toán $(\mathrm{LEP}_{\lambda,\mu})$.

Với mỗi $\lambda \in \Lambda, \mu \in M$, ta kí hiệu tập nghiệm của bài toán $(\mathrm{LVI}_{\lambda,\mu})$ như sau:

$$V(\lambda,\mu) = \{ x \in K(\lambda) \mid F(x,y,\mu) \in \mathbb{L}_2, \forall y \in K(\lambda) \}.$$

Khi tập ràng buộc K không phụ thuộc tham số, ta được nghiệm bài toán (LVI_μ) như sau:

$$V(\mu) = \{ x \in K \mid F(x,y,\mu) \in \mathbb{L}_2, \forall y \in K \}.$$

Hệ quả 5.1 *Xét bài toán* (LVI_μ), *giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) *K là tập compact,*

(ii) *h_i, $i = 1, 2$ liên tục trong $X \times \{\mu_0\}$.*

Khi đó, V nửa liên tục trên và đóng.

Chứng minh

Ta chỉ cần kiểm tra giả thuyết (ii) trên thỏa mãn Định lý 3.1. Thật vậy, vì $h_i, i = 1, 2$ liên tục trong $X \times \{\mu_0\}$ nên hàm $F_i(x,y,\mu), i = 1,2$ cũng liên tục trong $K \times K \times \{\mu_0\}$. ■

Hệ quả 5.2 *Xét bài toán* $(\mathrm{LVI}_{\lambda,\mu})$, *giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn*

(i) *K liên tục tại λ_0 và $K(\lambda_0)$ là tập compact,*

(ii) *$h_i, i = 1, 2$ liên tục trong $X \times \{\mu_0\}$.*

Khi đó, V nửa liên tục trên và đóng tại (λ_0, μ_0).

Chứng minh

Tương tự, ta chỉ cần kiểm tra giả thuyết (ii) trên thỏa mãn Định lý 4.2. Thật vậy, vì $h_i, i = 1, 2$ liên tục trong $X \times \{\mu_0\}$ nên hàm $F_i(x,y,\mu), i = 1, 2$ cũng liên tục trong $K(\lambda_0) \times K(\lambda_0) \times \{\mu_0\}$. ■

6 KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan đến tính compact và tính liên tục của tập ràng buộc và hàm mục tiêu, chúng tôi đã nghiên cứu thành công các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên và tính đóng của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng theo nón Lorentz. Ứng dụng các kết quả đạt được cho lớp bài toán bất đẳng thức biến phân theo nón Lorentz, chúng tôi cũng thu được các kết quả mới cho cả trường hợp đặc biệt này. Qua kết quả đạt được của bài báo này, chúng tôi nhận thấy rằng với các giả thiết thích hợp chúng ta có thể thu được các kết quả về tính nửa liên tục dưới, tính liên tục hay sự đặt chỉnh của lớp các bài toán liên quan đến tối ưu theo nón Lorentz.

LỜI CẢM TẠ

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các cán bộ phản biện đã đọc rất kỹ bản thảo và có những góp ý quý báu giúp cho bài báo của chúng tôi được hoàn thiện hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L.Q., Duy T.Q., Kruger, A.Y., Thao, N.H., 2014. Well-posedness for lexicographic vector equilibrium problems. In: Vladimir, D., Panos, M.P., Mikhail, B. (Eds). Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics. Springer Optimization and Its Applications. Springer-Verlag, Berlin. 87: 157–172.

Anh, P.N., Hai, T.N., Tuan, P.M., 2015. On ergodic algorithms for equilibrium problems. Journal of Global Optimization. 64: 179 –195.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2007. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. Journal of Optimization Theory and Applications. 135: 271–284.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2010. Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems. Journal of Global Optimization. 46: 247–259.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., 2012. Well-posedness under relaxed semicontinuity for bilevel equilibrium and optimization problems with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications.153: 42–59.

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Van, D.T.M., Yao, J.C., 2009. Well-posedness for vector quasiequilibria, Taiwanese Journal of Mathematics. 13: 713–737.

Ansari, Q.H., Yang, X.Q., Yao, J.C., 2001. Existence and duality of implicit vector variational problems. Numerical Functional Analysis and Optimization. 22: 815–829.

Aubin, J.P., Frankowska, H., 1990. Set-Valued Analysis. Birkhäuser Boston Inc., Boston. 33–48.

Bianchi, M., Pini, R., 2003. A note on stability for parametric equilibrium problems. Operations Research Letters. 31: 445–450.

Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando, M., 2013. Existence and solution methods for equilibria. European Journal of Operational Research. 227: 1–11.

Blum, E., Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. The Mathematics Student. 63: 123–145.

Chi, X., Liu, S., 2009. A one-step smoothing Newton method for second-order cone programming. Journal of Computational and Applied Mathematics. 223: 114–123.

Dong, L., Tang, J., Zhou, J., 2012. A smoothing Newton algorithm for solving the monotone second-order cone complementarity problems. Journal of Applied Mathematics and Computing. 40: 45–61.

Fang, L., He, G., Hu, Y., 2009. A new smoothing Newton-type method for second-order cone programming problems. Applied Mathematics and Computation. 215: 1020–1029.

Fu, J.Y., Wan, A.H., 2002. Generalized vector equilibrium problems with set-valued mappings. Mathematical Methods of Operations Research. 56: 259–268.

Iusem, A.N., Sosa, W., 2010. On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces. Optimization 59: 1259–1274.

Kimura, K., Liou, Y.C., Wu, S.Y., Yao, J.C., 2008. Well-posedness for parametric vector equilibrium problems with applications. Journal of Industrial and Management Optimization. 4: 313–327.

Muu, L.D., Quy, N.V., 2015. On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems. Vietnam Journal of Mathematics. 43: 229–238.

Pedro G., Alberto S., 2012. Equilibrium problems involving the Lorentz cone. Journal of Global Optimization. 58: 321–340.

Quoc, T.D., Anh, P.N., Muu, L.D., 2012. Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems. Journal of Global Optimization. 52: 139–159.

Wu, J., Chen, J. S., 2012. A proximal point algorithm for the monotone second-order cone complementarity problem. Computational Optimization and Applications. 51:1037–1063.