TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN CỰC TIỂU HÓA CÓ ĐIỀU KIỆN

Nguyễn Hữu Danh[1*] và Trần Ngọc Tâm[2]
[1]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*
[2]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
(*[*]Email: nhdanh@tdu.edu.vn*)

Ngày nhận: *17/12/2020*
Ngày phản biện: *11/01/2021*
Ngày duyệt đăng: *25/02/2021*

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu này, chúng tôi quan tâm đến bài toán cực tiểu hóa có điều kiện dưới sự nhiễu của cả hàm mục tiêu và các ràng buộc. Với các giả thiết về tính tựa lồi mạnh, tính liên tục Hölder của hàm mục tiêu cùng với tính liên tục Hölder của ánh xạ ràng buộc, các điều kiện đủ cho sự ổn định theo nghĩa liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm các bài toán trên được thiết lập. Mục đích nghiên cứu của chúng tôi là tiếp tục cải tiến các kết quả trong các tác giả Li and Li (2014) và Anh et al. (2015). Cụ thể là, chúng tôi muốn giảm nhẹ các điều kiện về tính lồi/lõm trong các kết quả trên mà vẫn đạt được tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm bài toán cực tiểu hóa có điều kiện. Nhiều ví dụ cũng được đưa ra để minh họa cho các kết quả chính của chúng tôi là mới và khác với các kết quả trước đây.

Từ khóa: *Bài toán cực tiểu hóa có điều kiện, liên tục Hölder, liên tục Lipschitz, tính tựa lồi mạnh*

Trích dẫn: Nguyễn Hữu Danh và Trần Ngọc Tâm, 2021. Tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán cực tiểu hóa có điều kiện. Tạp chí Nghiên cứu khoa học và Phát triển kinh tế Trường Đại học Tây Đô. 11: 117-126.

**Ths. Nguyễn Hữu Danh – Giảng viên Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*

1. GIỚI THIỆU

Phân tích sự ổn định của tập nghiệm của các bài toán liên quan đến tối ưu là một chủ đề quan trọng và thú vị trong lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Nó có ý nghĩa trong việc xây dựng mô hình, các đặc trưng tối ưu, và đối với các giải thuật số. Cho đến nay, hầu hết các kết quả ổn định nghiệm bao gồm tính ổn định định tính như tính đóng, sự hội tụ, tính nửa liên tục/liên tục theo nghĩa Berge hoặc Hausdorff (Li et al., 2015; Khan et al., 2015; Li et al., 2016; Khushboo and Lalitha, 2018; Kapoor and Lalitha, 2019,… và các tài liệu tham khảo trong đó), và tính ổn định định lượng như tính liên tục Hölder/Lipschitz, tính khả vi, tính dưới vi phân của tập nghiệm (Guo et al., 2012; Eichfelder and Ha, 2013; Gfrerer, 2013, 2014; Li and Li, 2014; Gfrerer and Klatte, 2015,… và các tài liệu tham khảo trong đó). Bằng cách sử dụng các giả thiết liên quan đến tính lồi mạnh và tính liên tục Lipschitz của hàm mục tiêu, Li and Li (2014) đã đạt được tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán cực tiểu hóa có điều kiện.

Gần đây, tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng đã được nghiên cứu và nhận được nhiều sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu (Anh and Khanh, 2009; Li et al., 2009; Li et al., 2011; Li et al., 2013; Chen et al., 2013; Anh et al., 2015; Anh et al., 2018). Ta thấy rằng các giả thiết liên quan đến tính đơn điệu mạnh, giả đơn điệu mạnh hoặc lồi mạnh đóng vai trò quan trọng trong các bài báo được đề cập. Bằng các giả thiết về tính đơn điệu mạnh, Anh and Khanh (2009) đã thu được tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng vô hướng. Các tác giả trong Li et al. (2013) và Anh et al. (2015) đã thay thế các giả thiết liên quan đến tính đơn điệu mạnh và tính giả đơn điệu mạnh bằng tính lồi mạnh để thiết lập các điều kiện đủ cho sự liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm của các bài toán cân bằng vô hướng; và với cùng ý tưởng, trường hợp vectơ được nghiên cứu trong Anh et al. (2018). Trong Li et al. (2009) và Li et al. (2011), để đạt được tính liên tục Hölder, các tác giả đã sử dụng các giả thiết liên quan đến tập nghiệm, điều này rất khó áp dụng cho các bài toán thực tế.

Từ những quan sát trên, trong bài báo này, chúng tôi đưa ra mục tiêu nghiên cứu về tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm cho bài toán cực tiểu hóa có điều kiện. Các giả thiết chính của bài báo này là một sự cải tiến so với các giả thiết tương ứng đã được sử dụng trong các bài báo trước đây. Dựa trên một lớp hàm tựa lồi mạnh, chúng tôi thiết lập tính liên tục Hölder của nghiệm cho bài toán cực tiểu hóa có điều kiện. Chúng tôi cũng đưa ra một ví dụ để minh họa rằng các kết quả chính của chúng tôi có thể áp dụng được nhưng các kết quả trước đó thì không. Ngoài ra chúng tôi còn cung cấp một phản ví dụ để chỉ ra sự thiết yếu của các giả thiết.

Phần còn lại của bài báo được trình bày như sau. Mục 2 giới thiệu bài toán cực tiểu hóa có điều kiện và nhắc lại các khái niệm cần thiết cho phần sau. Trong Mục 3, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán đã nêu. Cuối cùng, Mục 4 là phần kết luận.

2. MỞ ĐẦU

Cho X, Y, Z là các không gian định chuẩn, và $A \subset X$, $\Lambda \subset Y, M \subset Z$ là các tập con khác rỗng. Cho $K: \Lambda \rightrightarrows A$ là ánh xạ đa trị có giá trị lồi, khác rỗng và $f: A \times M \to \mathbb{R}$. Ta xét bài toán cực tiểu hóa có điều kiện phụ thuộc tham số $(\lambda, p) \in \Lambda \times M$ sau đây:

(CMP) $$\min_{x \in K(\lambda)} f(x, p).$$

Với mỗi $(\lambda, p) \in \Lambda \times M$, ta ký hiệu tập nghiệm của (CMP) là

$$S(\lambda, p) := \{\bar{x} \in K(\lambda) | f(y, p) - f(\bar{x}, p) \geq 0, \quad \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Trong bài báo này, ta sử dụng ký hiệu $\|\cdot\|$ cho chuẩn trong không gian định chuẩn bất kỳ. Ký hiệu $\mathbb{R}_+$ là tập hợp các số thực không âm và $\mathbb{B}(x, r)$ là quả cầu đóng bán kính $r \geq 0$ có tâm tại x. $\mathrm{conv}(A)$ ký hiệu cho bao lồi của tập $A \subset X$. Với hai tập $A, B \subset X$, ta sử dụng khái niệm khoảng cách sau

$$\rho(A, B) := \sup_{a \in A, b \in B} \| a - b \|.$$

Chú ý rằng $\rho(A, B) = +\infty$ khi A hoặc B không bị chặn. Ta nhắc lại một số khái niệm cần thiết trong phần tiếp theo.

Định nghĩa 2.1 Cho $n, \gamma > 0$. Ta nói rằng

(a) một hàm $g: X \to \mathbb{R}$ là $n.\gamma$-liên tục Hölder tại $\bar{x} \in X$ nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{x}$ sao cho, với mọi $x_1, x_2 \in U$,

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq n \| x_1, -x_2 \|^{\gamma};$$

(b) một ánh xạ đa trị $K: \Lambda \rightrightarrows X$ là $n.\gamma$-liên tục Hölder tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ nếu và chỉ nếu tồn tại một lân cận N của $\bar{\lambda}$ sao cho, với mọi $\lambda_1, \lambda_2 \in N$,

$$K(\lambda_1) \subset K(\lambda_2) + n\mathbb{B}(0, \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\gamma}).$$

Nếu $\gamma = 1$, thì tính liên tục Hölder được gọi là liên tục Lipschitz.

Ta nói rằng một tính chất nào đó được thỏa mãn trên một tập con $B \subset X$ nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn tại mọi điểm của B.

Định nghĩa 2.2 Xét $g: X \to \mathbb{R}$, $B \subset X$, và h, β là các số dương. Ta nói rằng

(a) g là $h.\beta$-lồi mạnh trên một tập con lồi B nếu và chỉ nếu, với mọi $x_1, x_2 \in B$ và $t \in (0,1)$,

$$g((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)g(x_1) + tg(x_2) - ht(1-t) \| x_1 - x_2 \|^{\beta}.$$

(b) g là $h.\beta$-tựa lồi mạnh trên một tập con lồi B nếu và chỉ nếu, với mọi $x_1, x_2 \in B$ và $t \in (0,1)$,

$$g((1-t)x_1 + tx_2) \leq \max\{g(x_1), g(x_2)\} - ht(1-t) \| x_1 - x_2 \|^{\beta}.$$

(c) g là $h.\beta$-giống lồi mạnh trên B (B không cần thiết phải lồi) nếu và chỉ nếu, với mọi $x_1, x_2 \in B$ và $t \in (0,1)$, tồn tại $z \in B$ sao cho,

$$g(z) \leq (1-t)g(x_1) + tg(x_2) - ht(1-t) \parallel x_1 - x_2 \parallel^{\beta}.$$

(d) g là $h.\beta$-tựa giống lồi mạnh trên B (B không cần thiết phải lồi) nếu và chỉ nếu, với mọi $x_1, x_2 \in B$ và $t \in (0,1)$, tồn tại $z \in B$ sao cho,

$$g(z) \leq \max\{g(x_1), g(x_2)\} - ht(1-t) \parallel x_1 - x_2 \parallel^{\beta}.$$

Chú ý 2.1 Dễ thấy rằng tính lồi mạnh (giống lồi mạnh) suy ra tính tựa lồi mạnh (tựa giống lồi mạnh). Ví dụ sau đây chỉ ra chiều ngược lại không đúng.

Ví dụ 2.1 Cho $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $g(x) = -x^2 - 2x$ với mọi $x \in [0,1]$. Khi đó, g là 1.2-tựa lồi mạnh trên $[0,1]$ nhưng, nó không những không lồi mạnh mà còn không lồi trên $[0,1]$.

Ta nói rằng g là $h.\beta$-tựa lõm mạnh (giống tựa lõm mạnh) trên B nếu $-g$ là $h.\beta$- tựa lồi mạnh (giống tựa lồi mạnh) trên B.

3. TÍNH LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM

Trong mục này, chúng tôi phát biểu các kết quả chính của bài báo. Cụ thể, các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của các ánh xạ nghiệm đối với các bài toán cực tiểu hóa có điều kiện phụ thuộc tham số được thiết lập. Vì sự tồn tại của các tập nghiệm đã được nghiên cứu nhiều, chúng tôi không nghiên cứu về sự tồn tại và luôn giả thiết rằng các tập nghiệm là khác rỗng trong một lân cận của điểm đang xét.

Định lý 3.1 *Xét* (CMP)*, giả sử rằng tập nghiệm của* (CMP) *tồn tại trong lân cận $N \times U$ của điểm $(\bar{\lambda}, \bar{p}) \in \Lambda \times M$. Giả sử thêm rằng*

(i) *K là $\ell.\alpha$-liên tục Hölder trên một lân cận N của $\bar{\lambda}$;*

(ii) *với mỗi $p \in U$, $f(\cdot, p)$ là $m.\delta$-liên tục Hölder cũng như $h.\beta$-tựa lồi mạnh trên* $\mathrm{conv}(K(N))$;

(iii) *với mỗi $x \in K(N)$, $f(x, \cdot)$ là $n.\gamma$-liên tục Hölder trên U.*

Khi đó, trên $N \times U$, ánh xạ nghiệm S là đơn trị và thỏa mãn điều kiện Hölder sau: với mọi $(\lambda_1, p_1), (\lambda_2, p_2) \in N \times U$,

$$\rho(S(\lambda_1, p_1), S(\lambda_2, p_2)) \leq \left(\frac{4m\ell^{\delta}}{2^{\delta}h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel^{\frac{\alpha\delta}{\beta}} + \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \parallel p_1 - p_2 \parallel^{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Chứng minh. Ta chia nội dung chứng minh thành ba bước.

Bước 1. Xét $x_{11} \in S(\lambda_1, p_1)$ và $x_{21} \in S(\lambda_2, p_1)$ tùy ý. Ta chứng minh rằng

$$\parallel x_{11} - x_{21} \parallel \leq \left(\frac{4m\ell^{\delta}}{2^{\delta}h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \parallel \lambda_1 - \lambda_2 \parallel^{\frac{\alpha\delta}{\beta}}. (1)$$

Từ tính liên tục Hölder của K, tồn tại $x_1 \in K(\lambda_1)$ và $x_2 \in K(\lambda_2)$ sao cho

$\| x_{11} - x_2 \| \leq \ell \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\alpha}$, $\| x_{21} - x_1 \| \leq \ell \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\alpha}$. (2)

Vì K có giá trị lồi, ta có $\frac{x_1+x_{11}}{2} \in K(\lambda_1)$ và $\frac{x_2+x_{21}}{2} \in K(\lambda_2)$. Theo định nghĩa của tập nghiệm, ta có,

$$f\left(\frac{x_1+x_{11}}{2}, p_1\right) - f(x_{11}, p_1) \geq 0 \text{ và}$$

$$f\left(\frac{x_2+x_{21}}{2}, p_1\right) - f(x_{21}, p_1) \geq 0. \quad (3)$$

Sử dụng giả thiết tựa lồi mạnh trong (ii), ta có

$$f\left(\frac{x_{11}+x_{21}}{2}, p_1\right) \leq \max\{f(x_{11}, p_1), f(x_{21}, p_1)\} - \frac{h}{4} \| x_{11} - x_{21} \|^{\beta}. \quad (4)$$

Trường hợp 1: $\max\{f(x_{11}, p_1), f(x_{21}, p_1)\} = f(x_{11}, p_1)$, khi đó (4) suy ra

$$\frac{h}{4} \| x_{11} - x_{21} \|^{\beta} \leq f(x_{11}, p_1) - f\left(\frac{x_{11}+x_{21}}{2}, p_1\right)$$

$$\leq f(x_{11}, p_1) - f\left(\frac{x_{11}+x_{21}}{2}, p_1\right) + f\left(\frac{x_1+x_{11}}{2}, p_1\right) - f(x_{11}, p_1)$$

$$\leq m \left\| \frac{x_1+x_{11}}{2} - \frac{x_{11}+x_{21}}{2} \right\|^{\delta} = \frac{m}{2^{\delta}} \| x_1 - x_{21} \|^{\delta}$$

$$\leq \frac{m}{2^{\delta}} (\ell \| \lambda_1 - \lambda_2 \|)^{\alpha\delta} = \frac{m\ell^{\delta}}{2^{\delta}} \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\alpha\delta},$$

suy ra

$$\| x_{11} - x_{21} \| \leq \left(\frac{4m\ell^{\delta}}{2^{\delta}h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\frac{\alpha\delta}{\beta}}. \quad (5)$$

Trường hợp 2: $\max\{f(x_{11}, p_1), f(x_{21}, p_1)\} = f(x_{21}, p_1)$, khi đó (4) suy ra

$$\frac{h}{4} \| x_{11} - x_{21} \|^{\beta} \leq f(x_{21}, p_1) - f\left(\frac{x_{11}+x_{21}}{2}, p_1\right)$$

$$\leq f(x_{21}, p_1) - f\left(\frac{x_{11}+x_{21}}{2}, p_1\right) + f\left(\frac{x_2+x_{21}}{2}, p_1\right) - f(x_{21}, p_1)$$

$$\leq m \left\| \frac{x_2+x_{21}}{2} - \frac{x_{11}+x_{21}}{2} \right\|^{\delta} = \frac{m}{2^{\delta}} \| x_2 - x_{11} \|^{\delta}$$

$$\leq \frac{m}{2^{\delta}} (\ell \| \lambda_1 - \lambda_2 \|)^{\alpha\delta} = \frac{m\ell^{\delta}}{2^{\delta}} \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\alpha\delta},$$

suy ra

$$\| x_{11} - x_{21} \| \leq \left(\frac{4m\ell^{\delta}}{2^{\delta}h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| \lambda_1 - \lambda_2 \|^{\frac{\alpha\delta}{\beta}}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6), ta được bất đẳng thức (1).

Bước 2. Với mọi $x_{21} \in S(\lambda_2, p_1)$ và $x_{22} \in S(\lambda_2, p_2)$, ta có $f(x_{22}, p_1) - f(x_{21}, p_1) \geq 0$ và $f(x_{21}, p_2) - f(x_{22}, p_2) \geq 0$. Ta chứng minh rằng

$$\| x_{21} - x_{22} \| \leq \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta}}. \quad (7)$$

Vì K có giá trị lồi, ta có $\frac{x_{21}+x_{22}}{2} \in K(\lambda_2)$. Theo định nghĩa của tập nghiệm, ta có

$$f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right) - f(x_{22}, p_2) \geq 0$$

và $f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_1\right) - f(x_{21}, p_1) \geq 0.$ (8)

Sử dụng tính tựa lồi mạnh trong (ii), ta có

$$f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right) \leq \max\{f(x_{21}, p_2), f(x_{22}, p_2)\} - \frac{h}{4} \| x_{21} - x_{22} \|^{\beta}. \quad (9)$$

Trường hợp 1: $\max\{f(x_{21}, p_2), f(x_{22}, p_2)\} = f(x_{21}, p_2)$, khi đó (9) suy ra

$$\begin{aligned}\frac{h}{4} \| x_{21} - x_{22} \|^{\beta} &\leq f(x_{21}, p_2) - f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right)\\ &\leq f(x_{21}, p_2) - f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right) + f(x_{22}, p_1) - f(x_{21}, p_1)\\ &\quad + f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right) - f(x_{22}, p_2)\\ &\leq n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} + n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} = 2n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma},\end{aligned}$$

suy ra

$$\| x_{21} - x_{22} \| \leq \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta}}. \quad (10)$$

Trường hợp 2: $\max\{f(x_{21}, p_2), f(x_{22}, p_2)\} = f(x_{22}, p_2)$, khi đó (9) suy ra

$$\begin{aligned}\frac{h}{4} \| x_{21} - x_{22} \|^{\beta} &\leq f(x_{22}, p_2) - f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right)\\ &\leq f(x_{22}, p_2) - f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_2\right) + f(x_{21}, p_2) - f(x_{22}, p_2)\\ &\quad + f\left(\frac{x_{21}+x_{22}}{2}, p_1\right) - f(x_{21}, p_1)\\ &\leq n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} + n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} = 2n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma},\end{aligned}$$

suy ra

$$\| x_{21} - x_{22} \| \leq \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta}}. \quad (11)$$

Từ (10) và (11), (7) được chứng minh.

Bước 3. Với mọi $x_{11} \in S(\lambda_1, p_1)$ và $x_{22} \in S(\lambda_2, p_2)$, từ (1) và (7), ta có

$$\| x_{11} - x_{22} \| \leq \| x_{11} - x_{21} \| + \| x_{21} - x_{22} \|,$$

suy ra

$$\rho\big(S(\lambda_1,p_1),S(\lambda_2,p_2)\big) \le \left(\frac{4m\ell^{\delta}}{2^{\delta}h}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\parallel \lambda_1-\lambda_2 \parallel^{\frac{\alpha\delta}{\beta}}+\left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \parallel p_1-p_2 \parallel^{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Đặt $\lambda_2=\lambda_1$ và $p_2=p_1$ trong bất đẳng thức trên, ta thấy rằng đường kính của $S(\lambda_1,p_1)$ bằng 0 với (λ_1,p_1) tùy ý, nghĩa là, ánh xạ nghiệm S là đơn trị trên $N\times U$. Định lý 3.1 đã được chứng minh. ■

Chú ý 3.1 Định lý 3.1 đã cải thiện Định lý 3.3 trong Li and Li (2014) và Hệ quả 4.1 trong Anh et al. (2015) theo hai phương diện sau:

1. Tính lồi mạnh của hàm mục tiêu f trong thành phần thứ nhất được giảm nhẹ thành tựa lồi mạnh. Ta biết rằng tính lồi mạnh là một điều kiện nặng và do đó điều kiện này khó áp dụng trong các tình huống thực tế. Vì vậy, sự giảm nhẹ này là rất có ý nghĩa.

2. Tính chất Lipschitz của hàm mục tiêu f trong thành phần thứ hai được tổng quát lên thành tính liên tục Hölder.

Ví dụ sau đây chỉ ra trường hợp Định lý 3.1 có thể áp dụng được trong khi các kết quả trong Li and Li (2014) và Anh et al. (2015) thì không.

Ví dụ 3.1 Cho $X=A=\mathbb{R},\Lambda=M=[0,1]$, $K(\lambda)=[0,\lambda]$, và $f(x,p)=(p+1)x$. Khi đó, ta thấy rằng tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 đều thỏa mãn với $l=1,\alpha=1,h=2,\beta=1,m=2,\delta=1,n=2,\gamma=1$. Tập nghiệm là $S(\lambda,p)=\{0\}$ liên tục Hölder với mọi (λ,p).

Rõ ràng điều kiện lồi mạnh của f không được thỏa mãn. Nghĩa là, các kết quả trong Li and Li (2014) và Anh et al. (2015) không áp dụng được.

Ví dụ tiếp theo chỉ ra rằng các giả thiết trong Định lý 3.1 là thiết yếu.

Ví dụ 3.2 (tính tựa lồi mạnh là quan trọng) Cho $X=A=\mathbb{R}$, $\Lambda=M=[0,1]$, $K(\lambda)=[\lambda,2],(\bar{\lambda},\bar{p})=(0,0)$, và $f(x,p)=p^2(-x^2)$. Khi đó, giả thiết (i) thỏa mãn với $l=1$, $\alpha=1$, và tính liên tục Hölder trong (ii) được thỏa mãn với $m=4,\delta=1$. Giả thiết (iii) thỏa mãn với $n=8,\gamma=1$. Tập nghiệm là

$$S(\lambda,p)=\begin{cases}[0,2], & p=0,\\ \{2\}, & p\neq 0.\end{cases}$$

Do đó, $S(0,0)$ là không đơn phần tử và thậm chí S không nửa liên tục dưới tại $(\bar{\lambda},\bar{p})=(0,0)$. Nguyên nhân là tính tựa lồi mạnh của f trong (ii) bị vi phạm.

Trong trường hợp đặc biệt khi $K(\lambda)\equiv K$ (K là một tập khác rỗng), thì tính tựa lồi mạnh trong giả thiết (ii) của Định lý 3.1 có thể được giảm xuống thành giống tựa lồi mạnh, và chúng ta thu được kết quả sau.

Định lý 3.2 *Xét* (CMP) *với* $K(\lambda)\equiv K$, *giả sử tập nghiệm tồn tại trong lân cận* U

của điểm $\bar{p} \in M$. Giả sử thêm rằng các điều kiện sau được thỏa mãn

(i) *với mỗi $p \in U$, $f(\cdot,p)$ là $h.\beta$-giống tựa lồi mạnh trên* $\mathrm{conv}(K)$;

(ii) *với mỗi $x \in K$, $f(x,\cdot)$ là $n.\gamma$-liên tục Hölder trên U.*

Khi đó, trên U, ánh xạ nghiệm S là đơn trị và thỏa mãn điều kiện Hölder sau: với mọi $p_1, p_2 \in U$, $\rho(S(p_1),S(p_2)) \leq \left(\frac{4n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta-1}}$.

Chứng minh. Với mọi $x_1 \in S(p_1)$ và $x_2 \in S(p_2)$, ta có

$$f(x_2,p_1) - f(x_1,p_1) \geq 0, \quad f(x_1,p_2) - f(x_2,p_2) \geq 0. \tag{12}$$

Theo tính giống tựa lồi mạnh của f trên K, tồn tại $\bar{z} \in K$ sao cho

$$f(\bar{z},p_1) \leq \max\{f(x_1,p_1), f(x_2,p_1\} - \frac{h}{4} \| x_1 - x_2 \|^{\beta}. \tag{13}$$

Trường hợp 1: $\max\{f(x_1,p_1), f(x_2,p_1)\} = f(x_1,p_1)$, khi đó (13) suy ra

$$\frac{h}{4} \| x_1 - x_2 \|^{\beta} \leq f(x_1,p_1) - f(\bar{z},p_1)$$

$$\leq f(x_1,p_1) - f(\bar{z},p_1) + f(\bar{z},p_2) - f(x_2,p_2) + f(x_2,p_1) - f(x_1,p_1)$$

$$\leq n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} + n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} = 2n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma},$$

suy ra

$$\| x_{21} - x_{22} \| \leq \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta}}. \tag{14}$$

Trường hợp 2: $\max\{f(x_1,p_1), f(x_2,p_1)\} = f(x_2,p_1)$, khi đó (13) suy ra

$$\frac{h}{4} \| x_1 - x_2 \|^{\beta} \leq f(x_2,p_1) - f(\bar{z},p_1)$$

$$\leq f(x_2,p_1) - f(\bar{z},p_1) + f(\bar{z},p_1) - f(x_1,p_1) + f(x_1,p_2) - f(x_2,p_2)$$

$$\leq n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} + n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma} = 2n \| p_1 - p_2 \|^{\gamma},$$

suy ra

$$\| x_{21} - x_{22} \| \leq \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta}}. \tag{15}$$

Do đó

$$\rho(S(p_1),S(p_2)) \leq \left(\frac{8n}{h}\right)^{\frac{1}{\beta}} \| p_1 - p_2 \|^{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Đặt $p_2 = p_1$ trong bất đẳng thức ở trên, khi đó đường kính của $S(p_1)$ bằng 0 với p_1 tùy ý, nghĩa là, ánh xạ nghiệm S là đơn trị trên U. ■

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng các giả thiết về tính tựa lồi mạnh, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm cho bài toán cực tiểu hóa có ràng buộc phụ thuộc tham số. Chúng tôi cung cấp các ví dụ và phản ví dụ để minh họa khả năng áp dụng cũng như sự thiết yếu của các giả thiết.

Các kết quả đạt được rất có ý nghĩa trong toán học ứng dụng. Hơn nữa, chúng tôi tin rằng cách tiếp cận này có thể áp dụng cho các bài toán quan trọng khác như các bài toán quan hệ biến phân, bài toán bao hàm thức biến phân,…

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., 2009. Hölder continuity of the unique solution to quasiequilibrium problems in metric spaces. Journal of Optimization Theory and Applications. 141: 37–54.

2. Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Tam, T.N., 2015. On Hölder continuity of solution maps of parametric primal and dual Ky Fan inequalities. TOP. 23: 151–167.

3. Anh, L.Q, Duoc, P.T, Tam, T.N., 2018. On Lipschitz continuity of solution maps to parametric vector primal and dual equilibrium problems. Optimization. 67:1169–1182.

4. Chen, C.R., 2013. Hölder continuity of the unique solution to parametric vector quasiequilibrium problems via nonlinear scalarization. Positivity. 17: 133–150.

5. Eichfelder, G., Ha, T.X.D., 2013. Optimality conditions for vector optimization problems with variable ordering structures. Optimization. 62: 597–627.

6. Guo, L., Lin, G.H., Ye, J.J., 2012. Stability analysis for parametric mathematical programs with geometric constraints and its applications. SIAM Journal of Optimization. 22: 1151–1176.

7. Gfrerer, H., 2013. On directional metric subregularity and second-order optimality conditions for a class of nonsmooth mathematical programs. SIAM Journal of Optimization. 23: 632–665.

8. Gfrerer, H., 2014. Optimality conditions for disjunctive programs based on generalized differentiation with application to mathematical programs with equilibrium constraints. SIAM Journal of Optimization. 24: 898–931.

9. Gfrerer, H., Klatte, D., 2015. Lipschitz and Hölder stability of optimization problems and generalized equations. Mathematical Programming.

10. Khan, A.A., Tammer, C., Zălinescu, C., 2015. Set-Valued Optimization: An Introduction with Applications. Springer, Berlin.

11. Khushboo, Lalitha, C.S., 2019. Scalarizations for a set optimization problem using generalized oriented distance function. Positivity.

12. Li, X.B., Li, S.J., Wang, L.N., Teo, K.L., 2009. The Hölder continuity of solutions to generalized vector equilibrium problems. European Journal of Operational Research. 199: 334–338.

13. Li, S., Li, X., 2011. Hölder continuity of solutions to parametric weak generalized ky fan inequality. Journal of Optimization Theory and Applications. 149: 540–553.

14. Li, X., Li, S., 2014. Hölder continuity of perturbed solution set for convex optimization problems. Applied Mathematics and Computation. 232: 908–918.

HÖLDER CONTINUITY OF SOLUTION MAPPINGS TO CONSTRAINED MINIMIZATION PROBLEMS

Nguyen Huu Danh[1*] and Tran Ngoc Tam[2]
[1]*Faculty of Basic Sciences, Tay Do University*
[2]*Faculty of Natural Sciences, Can Tho University*
([*]Email: nhdanh@tdu.edu.vn)

ABSTRACT

In this paper, we are concerned a constrained minimization problem under perturbations of both objective functions and constraints. Under the key assumptions of the strong quasiconvexity, Hölder continuity of objective functions, the Hölder continuity of constrained mapping, sufficient conditions for the stability in the sense of Hölder/Lipschitz continuity of solution mappings to such problems are established. Our study aimed at improving the problem from the results of Li and Li (2014), and Anh et al. (2015). More precisely, we want to relax the strong convexity conditions in the above results to the weaker one whereas Hölder/Lipschitz continuity for solution mappings to the constrained minimization problem is also archived. Numerous examples are also given to illustrate that our main results are new and different from the ones in literature.

Keywords: *Constrained minimization problems, Hölder continuity, Lipschitz continuity, Strong quasiconvexity*