

MỘT ỨNG DỤNG CỦA SỰ PHÂN TÍCH MA TRẬN TRONG THUẬT TOÁN NÉN DỮ LIỆU

Nguyễn Quốc Tiên

Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP.HCM

Email: tiennq@hufi.edu.vn

Ngày nhận bài: 15/6/2022; Ngày chấp nhận đăng: 11/7/2022

TÓM TẮT

Trong bài viết này, tác giả trình bày phương pháp phân tích một ma trận thực (hoặc phức) theo giá trị suy biến của nó và giới thiệu một ứng dụng của sự phân tích này. Bài viết nhằm mục đích giới thiệu kiến thức nâng cao về đại số tuyến tính trong chương trình đại học ở trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Thành phố Hồ Chí Minh và kỳ vọng tăng hứng thú cho sinh viên khi học môn này.

Từ khóa: Giá trị riêng, giá trị suy biến, sự phân tích giá trị suy biến.

1. GIỚI THIỆU

Như chúng ta đã biết, một ma trận vuông A cấp n có thể được phân tích dưới dạng $A = P^{-1}DP$, với P là ma trận không suy biến và D là ma trận đường chéo với các phần tử trên chéo chính là các trị riêng của A . Sự phân tích này thường được gọi là sự chéo hóa ma trận vuông A . Cách phân tích này chỉ áp dụng được với ma trận vuông và không phải lúc nào cũng tồn tại. Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một phương pháp phân tích ma trận có tên là *sự phân tích giá trị suy biến*. Với cách phân tích này, một ma trận bất kỳ có thể được phân tích thành tích của ba ma trận. Trước khi bắt đầu, chúng ta nhắc lại một số định nghĩa và ký hiệu. Cho $x = (x_i)_{n \times 1}$, $y = (y_i)_{n \times 1}$ trong \mathbb{C}^m . Tích vô hướng của x, y được ký hiệu và định

nghĩa là $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^m \overline{y_i} x_i = \overline{y}^T x$, trong đó $\overline{y_i}$ là số phức liên hợp của y_i . $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ được

ký hiệu là $\|x\|$. Ma trận $A \in \mathbb{C}^m$ có chuyển vị liên hợp ký hiệu là A^* , tức là $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$. Nếu $A^* = A$ ta nói A là một ma trận hermit. Một hệ véc tơ $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{C}^m$ được gọi là trực chuẩn nếu $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ với $i \neq j$ và $\|u_i\| = 1$. Ta gọi ma trận $U_{m \times m}$ là ma trận unita nếu $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ với $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{C}^m$ là hệ trực chuẩn. Nếu U là ma trận unita thì U không suy biến và $U^{-1} = U^*$. Trên trường số thực ma trận A^* chính là A^T , ma trận unita chính là ma trận trực giao, ma trận hermit là ma trận đối xứng. Ta nhắc lại một số kết quả đã được biết đối với ma trận hermit $A_{m \times m}$ sau đây:

- A có m trị riêng thực.
- Hệ gồm các véc tơ riêng ứng với các giá trị phân biệt là trực giao.
- Tồn tại cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^m gồm m véc tơ riêng của A .

d) A được chéo hóa unita bởi một ma trận unita mà các cột là m vector riêng trực chuẩn của A .

Một số kí hiệu và định nghĩa không nhắc lại ở đây, chúng ta dễ dàng tìm thấy trong các giáo trình đại số tuyến tính, toán cao cấp A2-C2 ở trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Thành phố Hồ Chí Minh, hoặc trong các tài liệu [1-3].

2. SỰ PHÂN TÍCH MA TRẬN THEO CẶP MA TRẬN UNITA

Bây giờ, chúng ta sẽ nói đến một trong những phương pháp phân tích ma trận rất đẹp của đại số tuyến tính. Định lý sau đây sẽ cho ta thấy mọi ma trận không nhất thiết là ma trận vuông, đều có thể được phân tích thành tích của ba ma trận đặc biệt.

Định lý 2.1. Cho ma trận $A_{m \times n}$ bất kỳ và $q = \min\{m, n\}$. Khi đó, tồn tại ma trận $\Sigma_{m \times n}(\sigma_{ij})$ có $\sigma_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$ và $\sigma_{11} \geq \dots \geq \sigma_{qq} \geq 0$, và hai ma trận unita $U_{m \times m}, V_{n \times n}$ sao cho

$$A = U \Sigma V^*.$$

Chứng minh. Do A^*A là ma trận hermit nên A^*A được chéo hóa bởi một ma trận unita $V = [v_1, \dots, v_n]_{n \times n}$. Tức là

$$(A^*A)V = V \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

trong đó các λ_i là các trị riêng không âm của A^*A và có thể được sắp theo thứ tự $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$, còn lại $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ với $r \leq q$. Và ta có

$$\|Av_i\|^2 = \langle Av_i, Av_i \rangle = v_i^* A^* A v_i = v_i^* \lambda v_i = \lambda \|v_i\|^2 = \lambda.$$

Do đó, ta được $Av_i = 0$ với $i = r+1, \dots, n$. Tiếp theo ta xây dựng ma trận unita $U_{m \times m}$ thỏa yêu cầu của định lý.

Đặt véc tơ

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Av_i, i = 1, \dots, r.$$

Khi đó

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (Av_j)^* Av_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} v_j^* (A^* Av_i) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} v_j^* v_i = \delta_{ij}.$$

Vậy $\{u_1, \dots, u_r\}$ là hệ véc tơ trực chuẩn trong \mathbb{C}^m . Ta bổ sung vào $\{u_1, \dots, u_r\}$ để được một cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^m (nếu cần thiết). Ta được ma trận unita $U = [u_1, \dots, u_m]_{m \times m}$.

Đặt $\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$ hay $\sigma_{ii}^2 = \lambda_i$. Bây giờ ta có

$$\begin{aligned} AV &= [Av_1 \quad Av_2 \quad \dots \quad Av_r \quad Av_{r+1} \quad \dots \quad Av_n] \\ &= [\sqrt{\lambda_1}u_1 \quad \sqrt{\lambda_2}u_2 \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_r}u_r \quad 0 \quad \dots \quad 0] \\ &= [\sigma_{11}u_1 \quad \sigma_{22}u_2 \quad \dots \quad \sigma_{rr}u_r \quad 0 \quad \dots \quad 0] = U\Sigma, \end{aligned}$$

hay $A = U\Sigma V^*$.

Hệ quả 2.2. Cho ma trận thực $A_{m \times n}$ và $q = \min\{m, n\}$. Khi đó, tồn tại ma trận $\Sigma_{m \times n} (\sigma_{ij})$ có $\sigma_{ij} = 0$ với mọi $i \neq j$ và $\sigma_{11} \geq \dots \geq \sigma_{qq} \geq 0$, và tồn tại hai ma trận trực giao $U_{m \times m}, V_{n \times n}$ sao cho $A = U\Sigma V^T$.

Nhận xét 2.3. 1) Mặc dù Σ không phải ma trận vuông, ta vẫn có thể coi nó là ma trận chéo vì các thành phần khác không của nó chỉ nằm ở vị trí đường chéo, tức là tại các vị trí có chỉ số hàng và chỉ số cột là như nhau. Số lượng các phần tử khác 0 trong Σ chính là hạng của ma trận A .

2) Cách biểu diễn $A = U\Sigma V^*$ không là duy nhất. Chẳng hạn, nếu ta thay U và V bởi các ma trận đối của nó thì đẳng thức vẫn thỏa mãn.

3) Ta mô tả sự phân tích $A = U\Sigma V^*$ của ma trận A trong hai trường hợp: $m < n$ và $m > n$. (trường hợp $m = n$ có thể xếp vào một trong hai trường hợp trên) như sau:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{A_{m \times n}} = \boxed{U_{m \times m}} \times \boxed{\Sigma_{m \times n}} \times \boxed{V_{n \times n}^*} \\
 (m < n)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{A_{m \times n}} = \boxed{U_{m \times m}} \times \boxed{\Sigma_{m \times n}} \times \boxed{V_{n \times n}^*} \\
 (m > n)
 \end{array}$$

Định nghĩa 2.4. Các σ_{ii} trong Định lý 2.1 là căn bậc hai của các giá trị riêng của A^*A , chúng được gọi là các giá trị suy biến (singular values) của A .

Người ta cũng gọi sự phân tích ma trận A như trên là sự phân tích theo giá trị suy biến (Singular Value Decomposition).

Định lý 2.5. Số các giá trị suy biến khác 0 của A bằng hạng của A

Chứng minh. Vì hạng của ma trận chéo bằng số phần tử khác 0 của nó. Do $A = U\Sigma V^*$ với U, V là các ma trận unita nên U, V có hạng chính bằng cấp của chúng. Hạng của A là hạng của $U\Sigma V^*$. Hạng của $U\Sigma V^*$ chính là hạng của Σ và chính là số các giá trị suy biến của A .

3. THUẬT TOÁN PHÂN TÍCH MỘT MA TRẬN TỔNG QUÁT THEO GIÁ TRỊ SUY BIẾN

Cho $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ có hạng bằng k . Khi đó A có thể phân tích được dưới dạng $A = U\Sigma V^*$ với U, Σ, V^* lần lượt có cấp là $m \times m; m \times n; n \times n$ theo các bước sau:

(1) Tìm ma trận $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ là ma trận unita làm chéo A^*A ;

(2) Các phần tử chéo khác không của Σ là $\sigma_{11} = \sqrt{\lambda_1}; \sigma_{21} = \sqrt{\lambda_2}; \dots; \sigma_{kk} = \sqrt{\lambda_k}$ với $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ là các giá trị riêng khác không của A^*A tương ứng với các cột véc tơ của V ; các cột véc tơ của V được sắp thứ tự sao cho $\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{kk} > 0$

(3) Đặt $u_i = \frac{Av_i}{\|Av_i\|} = \frac{1}{\sigma_i} Av_i; (i = \overline{1, \dots, k})$, ta được $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ là một hệ trục chuẩn

(4) Mở rộng hệ $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ để được một cơ sở trục chuẩn $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ của \mathbb{C}^m , ta được ma trận unita $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$.

Để cho dễ biểu diễn và tính toán, chúng ta xét ví dụ sau với ma trận thực A

Ví dụ 3.1. Với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

ta có

$$A^*A = A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$A^T A$ có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 17, \lambda_2 = 1$. Do đó, A có các giá trị suy biến là

$\sigma_{11} = \sqrt{17}, \sigma_{22} = \sqrt{1} = 1$ và hai véc tơ riêng tương ứng là $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cơ sở trục chuẩn chéo

hóa A^*A là

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Đặt ma trận $V = [v_1, v_2]$.

Lúc này ta có

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Đặt

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_{11}} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_{22}} Av_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ta bổ sung thêm u_3 để được hệ trục chuẩn của \mathbb{R}^3 . Giải hệ phương trình tìm (a, b, c) trực giao với cả u_1, u_2

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ta được u_3 sau khi chuẩn hóa là

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Đặt ma trận $U = [u_1, u_2, u_3]$. Khi đó A có sự phân tích

$$A = U \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^T$$

4. MỘT ỨNG DỤNG

Giả sử A là một ma trận thực. Theo Định lý 2.1 về sự phân tích theo giá trị suy biến ma trận A , ta có:

$$A = U \Sigma V^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r & u_{r+1} & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{rr} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

Trong đó r là hạng của A và cũng là số giá trị suy biến khác 0 của A . Bây giờ, trong đẳng thức trên, các khối ma trận O chúng ta bỏ đi, khi đó ta được

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \end{bmatrix}_{m \times r} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{rr} \end{bmatrix}_{r \times r} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}_{r \times n}$$

Ta gọi sự phân tích trên là sự phân tích theo giá trị suy biến thu gọn của A .

Chẳng hạn ở Ví dụ 4.1 trên, ta có

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{34}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Như vậy ta có

$$A = \sigma_{11}u_1v_1^T + \sigma_{22}u_2v_2^T + \dots + \sigma_{rr}u_rv_r^T. \quad (*)$$

Với một ma trận A kích thước $m \times n$, để lưu trữ ta phải lưu tất cả mn số riêng biệt. Tuy nhiên, với sự phân tích A thành tổng các ma trận có hạng 1 như dạng (*), chúng ta chỉ cần lưu r giá trị σ và rm, rn các giá trị của các véc tơ u, v . Vậy ta cần một bộ nhớ để lưu ma trận A với số lượng $r(m+n+1)$ thay vì mn . Chẳng hạn, ta cần lưu một bức ảnh với kích thước 512×512 (pixel), có hạng $r=16$. Ta cần một bộ nhớ $16(512+512+1)=16400$ thay vì ta phải sử dụng đến $512 \times 512 = 262144$ đơn vị nhớ.

5. KẾT LUẬN

Với một ma trận hạng 16 như nói trên, tỉ số $\frac{16400}{262144} = 0,063$ được gọi là tỉ số nén. Dĩ nhiên, tỷ số nén này thay đổi tùy vào hạng của ma trận A cần lưu trữ. Chúng ta có thể lựa chọn hạng của ma trận A để có tỉ số nén phù hợp với khả năng lưu trữ và mục đích sử dụng của dữ liệu. Đối với một bức ảnh, hạng của ma trận càng lớn thì tính chân thực càng cao. Chúng ta biết rằng, những ứng dụng của sự phân tích ma trận trên trong việc lưu trữ tiết kiệm dữ liệu so với các thuật toán hiện nay thì thật là thô sơ. Nhưng nó là cơ sở toán học và là điểm khởi đầu cho các ý tưởng về sau. Qua đó ta thấy, việc giảng dạy các học phần đại số tuyến tính trong trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Thành phố Hồ Chí Minh ngoài việc cung cấp các kiến thức cơ bản thuần túy về toán học cần có những điểm nhấn rõ ràng, đi sâu vào một chủ đề nội dung nào đó. Việc này giúp người học thấy được ý nghĩa, tính thực dụng của những kiến thức đang được giảng dạy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Gene H. Golub and Charles F. Van Loan - Matrix Computations, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
2. Leslie Hogben - Handbook of linear algebra, Chapman and Hall/CRC, 2007.
3. Nicholas J. Higham - Functions of a matrix: Theory and Computation, Siam Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2008.

ABSTRACT

AN APPLICATION OF MATRIX DECOMPOSITION
IN DATA COMPRESSION ALGORITHM

Nguyen Quoc Tien
Ho Chi Minh City University of Food Industry
Email: *tiennq@hufi.edu.vn*

In this article, we present the method of decomposition a real (or complex) matrix in terms of its singular values and introduce an application of this decomposition. This article aims to introduce advanced knowledge about linear algebra in undergraduate program at Ho Chi Minh City University of Food Industry and hopes to increase students' interest in studying this subject.

Keywords: Eigenvalues, singular value, singular value decomposition.