DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI ĐỂ TÌM CỰC TRỊ TRONG ĐẠI SỐ VÀ HÌNH HỌC

ThS. NGUYỄN NGỌC ĐỨC - NGUYỄN THỊ MINH HUỆ*

1. Bất đẳng thức (BĐT) cổ điển mang tên nhà toán học Pháp Côsi (Cauchy, 1789-1857) được phát biểu dưới dạng tổng quát như sau:

Trung bình cộng của n số không âm, không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ với $x_1, x_2, \ldots x_n$ là các số không âm.

Có thể giới thiệu cho học sinh (HS) một số bài tập vận dụng BĐT này.

Các bài toán cực trị trong đại số và hình học là dạng bài toán tiêu biểu thường có những dạng sau: Trong tất cả các hình có cùng một tính chất, tìm những hình mà một đại lượng nào đó (độ dài đoạn thẳng, số đo góc, số đo diện tích...) có giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN).

Một trong các phương pháp giải toán cực trị đại số và hình học là sử dụng các BĐT, trong đó có BĐT Côsi. HS trung học cơ sở đặc biệt là HS lớp 8 và 9 được làm quen với BĐT Côsi dưới dạng $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$ hoặc $(x+y)^2 \geq 4xy$. Ở các bài toán cực trị hình học và đại số, BĐT này được sử dụng dưới các dạng sau:

Tìm GTNN:

- Dạng 1: $(x+y)^2 \geq 4xy$ hoặc $x^2 + y^2 \geq 2xy$
- Dạng 2: $\frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4$
- Dạng 3: Nếu tích xy là hằng số thì tổng x + y nhỏ nhất khi và chỉ khi x = y.

Tìm GTLN:

- Dạng 4: $4xy \leq (x+y)^2$ hoặc $2xy \leq x^2 + y^2$
- Dạng 5: $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$
- Dạng 6: Nếu tổng x + y là hằng số thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi x = y.

Trong các BĐT trên, điều kiện để xảy ra dấu đẳng thức là x = y và trừ các dạng 1 và 4, các dạng khác đòi hỏi x và y là các số dương.

2. Một số bài tập tìm cực trị đại số và hình học có sử dụng BĐT Côsi trong khuôn khổ kiến thức trung học cơ sở

2.1. Bài toán cực trị đại số

Bài toán 1: Cho x, y, z > 0 thỏa mãn : x + y + z = 2.

Tìm GTNN của $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Giải:

Vì x, y, z > 0, áp dụng BĐT Côsi với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2.\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}} = 2.\frac{x}{2} = x \ (1)$$

Tương tự ta có: $\frac{y^2}{z+x} + \frac{x+z}{4} \geq y \ (2)$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z \ (3)$$

Cộng (1) + (2) + (3) ta được

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) + \frac{x+y+z}{2} \geq x + y + z$$

$$\Rightarrow P \geq (x + y + z) - \frac{x+y+z}{2} = 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$. Vậy Min P=1 $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$

Nhận xét: Ta đã thêm $\frac{y+z}{4}$ vào hạng tử thứ nhất $\frac{x^2}{y+z}$ có trong đề bài, để khi vận dụng BĐT Côsi có thể

* Khoa Giáo dục Trung học cơ sở, Trường Cao đẳng sư phạm Bắc Ninh

khử được (y+ z). Cũng như vậy đối với 2 hạng tử còn lại của đề bài. Dấu đẳng thức xảy ra đồng thời trong (1), (2), (3) $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$. Nếu ta lần lượt thêm (y+ z), (x+ z), (x+y) vào $\frac{x^2}{y+z}, \frac{y^2}{x+z}, \frac{z^2}{x+y}$ thì ta cũng khử được.

Bài toán 2 (Tách một hạng tử chứa biến thành tổng của một hằng số với một hạng tử chứa biến sao cho hạng tử này là nghịch đảo của một hạng tử có trong biểu thức đã cho): Cho 0 < x < 2, tìm GTNN của $A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$.

Giải:

$$A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2-x}{x} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{9x}{2-x}.\frac{2-x}{x}} + 1 = 2\sqrt{9} + 1 = 7,$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{9x}{2-x} = \frac{2-x}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy Min A = 7. Trong cách giải trên, ta đã tách $\frac{2}{x}$ thành tổng $\frac{2-x}{x} + 1$. Hạng tử $\frac{2-x}{x}$ nghịch đảo với $\frac{x}{2-x}$ nên khi vận dụng BĐT Côsi ta được tích của chúng là một hằng số.

2.2. Bài toán cực trị hình học

Bài toán 1 (Một kết quả đẹp và thú vị về tứ giác nội tiếp): Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn *(hình 1)*, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

$$\frac{AB}{CD} + \frac{CD}{AB} + \frac{BC}{AD} + \frac{AD}{BC} \leq \frac{IA}{IC} + \frac{IC}{IA} + \frac{IB}{ID} + \frac{ID}{IB}$$

Chứng minh:

Dễ thấy $\Delta ABI \sim \Delta DCI$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AI}{DI} = \frac{BI}{CI} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{AI}{DI}.\frac{BI}{CI}} \quad (1)$$

Theo BĐT Côsi, ta có:

$$\sqrt{\frac{AI}{DI}.\frac{BI}{CI}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{AI}{CI} + \frac{BI}{ID}\right) \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IB}{ID}$

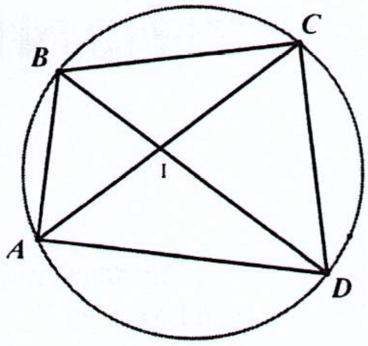
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AB}{CD} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC} + \frac{IB}{ID}\right)$ (3)

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có:

$$\frac{CD}{AB} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{IC}{IA} + \frac{ID}{IB}\right) (4); \frac{BC}{AD} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{IB}{ID} + \frac{IC}{IA}\right) (5); \frac{AD}{BC} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{IA}{IC} + \frac{ID}{IB}\right) (6)$$

Dấu bằng trong (4), (5), (6) xảy ra tương ứng khi $\frac{IC}{IA} = \frac{ID}{IB}; \frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IA}; \frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB}$.

Cộng từng vế của (3), (4), (5), (6) ta được điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi IA = IB = IC = ID ⇔ ABCD là hình chữ nhật.



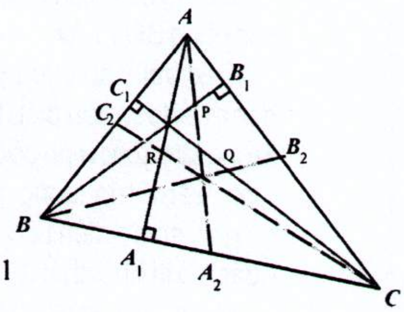
Hình 1

Bài toán 2: Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ ba chiều cao AA_1, BB_1, CC_1; ba trung tuyến AA_2, BB_2, CC_2. Giả sử $AA_2 \cap BB_1 = P$, $BB_2 \cap CC_1 = Q$, $CC_2 \cap AA_1 = R$. Chứng minh rằng: $\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \geq 6$ *(hình 2).*

Chứng minh:

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác AA_2C với đường thẳng BRB_1, ta có:

$$\frac{AP}{PA_2}.\frac{A_2B}{BC}.\frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Hình 2

Suy ra:

$$\frac{AP}{PA_2} = \frac{BC}{A_2B}.\frac{B_1C}{A_2B} \quad (1)$$

Do AA_2 là trung tuyến nên $BC = 2.A_2B$, và vì $BB_1 \perp AC$ nên

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{BB_1.cotgA}{BB_1.cotgC} = \frac{tgC}{tgA}.$$

Vậy từ (1) $\Rightarrow \frac{AP}{PA_2} = 2.\frac{tgC}{tgA}.$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\frac{BQ}{QB_2} = 2.\frac{tgA}{tgB}, \frac{CR}{RC_2} = 2.\frac{tgB}{tgC}.$$

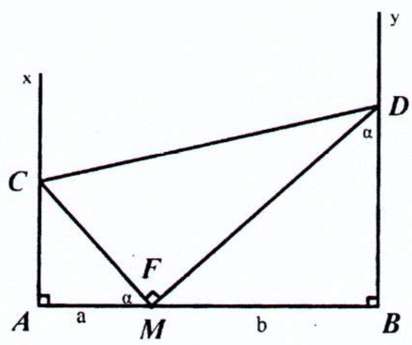
Từ đó: $\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} = 2.\left(\frac{tgC}{tgA} + \frac{tgA}{tgB} + \frac{tgB}{tgC}\right).$

Mặt khác, theo BĐT Côsi, thì:

$$\frac{tgC}{tgA} + \frac{tgA}{tgB} + \frac{tgB}{tgC} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{tgC}{tgA}.\frac{tgA}{tgB}.\frac{tgB}{tgC}} = 3.$$

Vậy: $\frac{AP}{PA_2}+\frac{BQ}{QB_2}+\frac{CR}{RC_2}\geq 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{tgC}{tgA}=\frac{tgA}{tgB}=\frac{tgB}{tgC}$, tức là tam giác ABC đều.

Bài toán 3: Cho điểm M nằm trên đoạn thẳng AB. Vẽ về một phía của AB các tia Ax, By vuông góc với AB. Qua M có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự ở C, D. Xác định vị trí của các điểm C, D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất *(hình 3)*.



Hình 3

Giải:

Theo BĐT Côsi: $2\sin\alpha\cos\alpha \leq \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Nên $S_{MCD}\geq ab$. Dấu bằng xảy ra khi $\sin\alpha=\cos\alpha \Leftrightarrow \alpha=45^0$.

Như vậy Min $S_{MCD}=ab$. Điểm C, D được xác định thứ tự trên các tia Ax, By sao cho AC = AM, BD = BM.

Ta có: $S_{MCD}=\frac{1}{2}MC.MD$.

Đặt: MA = a, MB = b, góc AMC = góc BMD = α.

Khi đó $MC=\frac{a}{\cos\alpha}$, $MD=\frac{b}{\sin\alpha}$

Nên: $S_{MCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sin\alpha\cos\alpha}$

Do a, b là hằng số nên S_{MCD} nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $2\sin\alpha\cos\alpha$ lớn nhất.

3. Một số bài tập tương tự

Bài 1: Cho x, y > 0 thỏa mãn x.y = 1. Tìm GTLN của $A=\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4}$.

Bài 2: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$. Tìm GTLN của biểu thức Q = abc.

Bài 3: Hãy nêu cách căng một sợi dây có độ dài a thành ba đoạn sao cho chúng tạo với bức tường có sẵn thành một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông cân ở A, các điểm E và F theo thứ tự thuộc các cạnh AB và AC có sao cho AE = CF. Xác định vị trí của E và F để tứ giác BEFC có diện tích nhỏ nhất. *Hướng dẫn: Đặt AE = x, AF = y, chú ý rằng x + y không đổi.*

Bài 5: Cho hình vuông ABCD. Điểm M thuộc đường chéo BD, E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB và AD. Điểm M ở vị trí nào trên BD thì tam giác CEF có diện tích lớn nhất? *Hướng dẫn: chứng minh dt(CEF) = dt(BEFD) đưa về bài 4.*

* * *

Toán học nghiên cứu rất đa chiều và phong phú về dạng, trong đó phải kể đến các bài toán về BĐT. Đây là những bài toán hay nhưng khó. Bài toán về BĐT được ứng dụng nhiều trong các dạng bài toán khác nhau và được sử dụng nhiều khi ôn tập, ôn thi, các kì thi HS giỏi, đặc biệt là thi HS giỏi khối 8, khối 9. Vì vậy, HS rất cần thiết phải nắm được những kiến thức cơ bản về BĐT và tìm cực trị, sử dụng BĐT cũng như biết vận dụng BĐT để giải các loại bài tập khác. Bài toán tìm cực trị trong đại số và hình học là một dạng toán giúp các em mở rộng tầm nhìn, có những cách làm sáng tạo độc đáo, hình thành nên kiến thức.❑

Tài liệu tham khảo

1. Vũ Hữu Bình. **Phương trình và bài toán với nghiệm nguyên.** NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2010.
2. Vũ Hữu Bình. **Nâng cao và phát triển Toán 8, 9.** NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2007.
3. Vũ Hữu Bình. **Kinh nghiệm dạy toán và học toán.** NXB *Giáo dục Việt Nam*, H.'2004.

SUMMARY

The problem of inequality is the application in the form of various problems and be of much use when reviewing, review, tests good students especially good students test block 8, block 9. Therefore, students are required to grasp the basic knowledge about the inequality and finding extreme values using the inequality as well as knowing the maximum inequality applied to other types of exercises. Finding the extreme values in algebra and geometry help students broaden vision; there are ways to do unique creations.