

# ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC TOÁN HỌC CỦA HỌC SINH PHỔ THÔNG QUA NHỮNG BÀI TOÁN ĐẶC THÙ

TS. CHU CẨM THO\* - VŨ ANH TUẤN\*\*

**1. Khung năng lực (NL) toán phổ thông**  
Theo Đào Thái Lai (2012), có thể hình dung khung NL toán phổ thông của học sinh (HS) Việt Nam bao gồm những NL sau:

NL	Nội dung/Biểu hiện	Công cụ đánh giá
Nắm vững những kiến thức và kĩ năng toán phổ thông cơ bản	Các kiến thức và kĩ năng toán học phổ thông thường sử dụng trong đời sống hàng ngày và là nền tảng để tiếp tục học ở các cấp cao hơn.	Các câu hỏi trắc nghiệm/tự luận đơn giản để kiểm tra kiến thức toán học đơn thuần.
NL tư duy và khả năng lập luận	- Sử dụng các thao tác tư duy: phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, trừu tượng hóa trong học toán, trong cuộc sống. - Thấy rằng các kết luận, khẳng định đều phải có cơ sở, có căn cứ. - Lập luận trong các trường hợp, tình huống cụ thể (tình huống toán học và tình huống trong đời sống hàng ngày). - Sử dụng suy luận hợp lí khi giải quyết các vấn đề.	Câu hỏi tự luận, đánh giá qua quá trình học tập bằng các bảng kiểm, qua hợp tác nhóm, biểu đạt tư duy, qua dự án.
NL tưởng tượng không gian	Tưởng tượng được các hình dạng không gian, vị trí tương đối giữa các đối tượng hình học và sự biến đổi chuyển động các hình hình học,...	Sử dụng các trò chơi hình học, qua mô hình, qua kĩ năng vẽ hình, đọc hình vẽ,...
NL hiểu và trình bày các nội dung toán học	- Đọc và hiểu các văn bản trình bày bằng ngôn ngữ toán học. - Trình bày vấn đề có nội dung liên quan tới toán học.	Đọc hiểu các văn bản (diễn đạt một khái niệm, định lí bằng ngôn ngữ thông thường, bằng ngôn ngữ toán, bằng nhiều cách,....).
NL sử dụng các kí hiệu, ngôn ngữ toán học	- Chuyển đổi từ ngôn ngữ thông thường sang ngôn ngữ toán học. - Chuyển đổi từ ngôn ngữ toán học sang ngôn ngữ thông thường.	Tóm tắt bài toán, phát biểu lại bài toán, vấn đề toán học,...
NL mô hình hóa toán học	Có NL mô hình hóa toán học các tình huống trong cuộc sống.	Chuyển đổi các vấn đề của cuộc sống thành các bài toán phổ biến trong toán học (giải bài toán bằng cách lập phương trình,....). Đánh giá qua các dự án học tập, qua bài toán thực tiễn.
NL phát hiện và giải quyết vấn đề	- Phát hiện các vấn đề cần giải quyết bằng toán. - Giải quyết các vấn đề toán học bằng các cách khác nhau.	Phát hiện được vấn đề. Lập được chiến lược, tìm được cách giải quyết vấn đề (bằng nhiều cách khác nhau). Sử dụng bài toán thực tiễn, đánh giá qua thực hiện dự án học tập.
NL sử dụng các công cụ, phương tiện học tập môn toán	Sử dụng các công cụ, phương tiện (bao gồm cả sử dụng công nghệ thông tin) trong những hoạt động liên quan đến toán.	Sử dụng công cụ tính toán, phần mềm toán học để giải toán, vẽ hình, báo cáo dự án học tập.

**2. Đề xuất phương án đánh giá NL toán học phổ thông qua một số bài toán đặc thù**

Trong mục này, tác giả thử đưa ra công cụ và những ví dụ minh họa để đánh giá một số NL toán học phổ thông mà chưa tính đến mức độ của mục tiêu.

**1) Đánh giá NL nắm vững kiến thức.** Những phạm trù con chính của kiến thức gồm:

**a) Kiến thức về thuật ngữ.** HS được yêu cầu phải nhận diện và làm quen với ngôn ngữ toán học, tức

phần lớn các thuật ngữ và kí hiệu tất được sử dụng bởi các nhà toán học với mục đích giao tiếp thông tin. Ví dụ: định nghĩa của các thuật ngữ có tính kĩ thuật như phần tử của một tập hợp, biến số, quan hệ, hàm số...

**b) Kiến thức về những sự kiện cụ thể.** Mục tiêu này đòi hỏi HS gọi ra được công thức và những quan hệ. Ví dụ: khả năng nhớ lại được dạng phương trình bậc nhất, công thức tính diện tích hình tròn, định lí Pitago,...

**c) Kiến thức về cách thức và phương tiện sử dụng trong những trường hợp cụ thể (NL ngôn ngữ).** Phạm trù con này bao gồm kiến thức về những quy ước. Ví dụ: các chữ cái in hoa được dùng để chỉ các hình hình học và kiến thức về phân loại và phạm trù, một số nào đó có là phần tử của một hệ thống số hay không.

**d) Kiến thức về các quy tắc và các tổng quát hóa (NL mô hình hóa):** Phạm trù này đòi hỏi HS trước hết phải gọi ra được các trừ

\* Tô Phương pháp dạy học, Trường Đại học sư phạm Hà Nội

\*\* Cao học Toán K23, Trường Đại học sư phạm Hà Nội



tượng của toán học để giúp mô tả, giải thích và dự đoán các hiện tượng, thứ hai là để nhận ra hay nhớ lại những quy tắc và các tổng quát hóa, hay những minh họa cụ thể của chúng trong một bài toán. Kiến thức về những định lý toán học và những quy tắc logic cơ bản rơi vào trong phạm trù con này.

Sau đây là những ví dụ mà mục tiêu là nắm vững những kiến thức toán phổ thông cơ bản: - Nhận ra được tính đối xứng, quay và tịnh tiến của những hình trong không gian; - Nhớ lại thể tích của một hình trụ đúng bằng một phần ba tích của diện tích đáy và chiều cao; - Định nghĩa được các thuật ngữ số trung bình, trung vị; - Nhớ lại thứ tự của các phép toán để rút gọn một biểu thức đại số hay số học; - Phát biểu mọi tam giác đều là đồng dạng; - Nhận ra khi nào thì sự chính xác về đo lường thỏa mãn câu hỏi, ví dụ: quy tắc làm tròn số; - Nhớ lại những điều kiện cơ bản để hai tam giác bằng nhau; - Nhận được những hạn chế của các tổng quát hóa có tính quy nạp trong chứng minh.

Những câu hỏi kiểm tra: - Câu 1: Một centimet khối là đơn vị của: A. Độ dài; B. Diện tích; C. Thể tích; D. Trọng lượng; - Câu 2: Số hạng thứ năm của một cấp số cộng ( $a_n$ ) có số hạng đầu là  $a$  và công bội  $d$  là: A.  $ad^5$ ; B.  $a - 5d$ ; C.  $a - 4d$ ; D.  $Ad^4$ ; E.  $a - 6d$ ; - Câu 3: Trong hệ số thực, phần tử đơn vị của phép nhân là:.....; - Câu 4: Dưới đây là các khẳng định về hàm số  $f(x) = x^2 - 6x - 8$ . Khoanh tròn các chữ cái in hoa tương ứng với các khẳng định đúng: A. Hàm số nghịch biến trong khoảng (3; 5); B. Hàm số đồng biến trong khoảng (1; 3); C. Đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh S(3; -1); D.  $f(2) > f(4)$ .

2) **Đánh giá NL nắm vững kĩ năng cơ bản.** Có thể hình dung NL này là khả năng sử dụng trực tiếp việc tính toán và khả năng thao tác trên các biểu diễn kí hiệu, các lời giải. Mục tiêu này bao gồm việc sử dụng các thuật toán như các kĩ năng thao tác và khả năng thực hiện trực tiếp các phép tính, những đơn giản hóa và các lời giải tương tự với các ví dụ HS đã gặp trong lớp, mặc dù có khác nhau về chi tiết. Câu hỏi có thể không đòi hỏi phải đưa ra quyết định là làm thế nào để tiếp cận bài toán, chỉ cần dùng kĩ thuật đã được học, hoặc có thể là một quy tắc phải được nhắc lại và áp dụng thẳng kĩ thuật đã được học.

Sau đây là một vài ví dụ trong đó mục tiêu là kĩ năng cơ bản, chẳng hạn: - Tìm tập nghiệm của những phương trình và bất phương trình bậc nhất một ẩn; - Phân tích thành nhân tử các dạng:  $ab - ac$ ,  $a^2 - b^2$ ,

$ax^2 - bx - c$ ; - Dụng hình bằng thước kẻ và compa, ví dụ các tam giác, tứ giác...; - Thay một giá trị số vào một công thức và đánh giá các biểu thức đại số.

Câu hỏi đánh giá: - Câu 1: Trong nghiệm của hệ phương trình:  $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 4y = 4 \end{cases}$ , giá trị của  $y$  bằng: A. -9; B.

$-\frac{5}{3}$ ; C.  $-\frac{1}{9}$ ; D.  $\frac{1}{9}$ ; E.  $\frac{5}{3}$ ; - Câu 2: Vẽ đồ thị hàm số  $y = -2x^2$ . Từ đó suy ra đồ thị hàm số  $y = -2x^2 - 1$ .

3) **Đánh giá NL tưởng tượng không gian.** NL này được hiểu là khả năng hình dung ra vị trí tương đối, các sắp xếp, thứ tự các vật thể ba chiều; vận dụng được các kiến thức về hình học không gian kết hợp với trí tưởng tượng để giải quyết các tình huống có vấn đề. Chẳng hạn có thể sử dụng các nội dung: - Bài toán đếm khối lập phương; - Các bài toán xác định tiết diện; - Các bài toán tính thể tích của khối hình bị cắt/phần còn lại của khối hình bị cắt; - Các bài toán về khai triển hình không gian; - Mô tả lại một hình ba chiều trên mặt phẳng hai chiều (trái hình); - Quan sát một hình ảnh và phân biệt được vị trí tương đối các sự vật hiện tượng trong hình ảnh đó.

Câu hỏi đánh giá: - Câu 1: Xếp các khối lập phương nhỏ có cạnh 2 cm thành khối lập phương lớn có thể tích bằng 216  $\text{cm}^3$ . Sau đó lấy đi các khối lập phương nhỏ ở chính giữa các mặt bên khối lập phương lớn. Tính diện tích toàn phần của khối còn lại; - Câu 2: Một bể chứa được 216  $\text{m}^3$  nước, đáy bể là một hình vuông, chiều cao của bể là 1,5m. Người ta muốn lát đáy bể bằng những viên gạch hình vuông cạnh 20 cm. Hỏi phải dùng bao nhiêu viên gạch?; - Câu 3: Vẽ lại quả bóng trên tờ giấy. Vẽ tranh tĩnh vật là các khối hình đặt lộn nhô (từ một khối hình đến nhiều khối hình); - Câu 4: Xác định tiết diện của hình cầu cắt bởi mặt phẳng đi qua tâm cầu và tạo với mặt phẳng nằm ngang góc  $45^\circ$ .

4) **Đánh giá NL lập luận** được hiểu là sử dụng các tiền đề và bằng các phương pháp luận (lí lẽ) để đến kết luận: - Các bài toán hình học và đại số có yêu cầu "chứng minh" hoặc trong bài làm cần chứng minh một sự kiện nào đó; - Các bài toán logic, suy luận; - Các bài toán ngụ ý biện. Chẳng hạn: + Câu 1: Cho tính chất "Chia hai vế của đẳng thức cho cùng một số thì thu được đẳng thức mới". Chứng minh hai số bất kì đều bằng nhau; + Câu 2: Chứng minh rằng trong tam giác đều các điểm trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp trùng nhau; + Câu 3: Nói



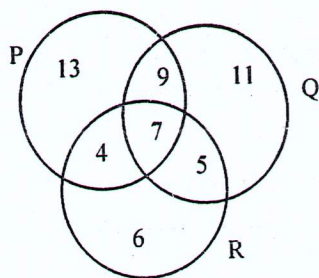
ràng tích của 6 số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 30 đúng hay sai?

NL lập luận cũng bao gồm “giải thích”. Hành động chính trong giải thích là việc xác định và hiểu các ý tưởng chính trong một giao tiếp cũng như hiểu các mối quan hệ của chúng. Nó gắn liền với việc giải thích hay tóm tắt một giao tiếp, ví dụ từ một đô thị hay bảng các dữ liệu người ta yêu cầu rút ra được những yếu tố hay nhận xét. HS được yêu cầu đưa ra sự phán xét khi tìm ra được những sự kiện quan trọng từ các sự kiện không quan trọng và rồi tổ chức lại các kiến thức để thấy nội dung trong giao tiếp như là một tổng thể.

Sau đây là một vài ví dụ về các mục tiêu ở đó phạm trù là giải thích. Cuối phần học này, HS sẽ có khả năng: - Quyết định về giá trị của một lập luận suy diễn; - Lập luận suy diễn từ các dữ kiện đã cho; - Phân biệt giữa các khái niệm và quá trình liên quan mật thiết với nhau, ví dụ: có khả năng phân biệt các loại biến số khác nhau; - Xác định được các phép toán hợp và giao của các tập hợp đã cho; - Chỉ ra được việc ứng dụng các quy luật giao hoán, kết hợp và phân bố; - Giải thích các sơ đồ, hình vẽ và bảng, chỉ ra được những điểm chính được minh họa trong sơ đồ; - So sánh các khái niệm toán học, quá trình, hình vẽ có liên quan; - Thấy được tính đối xứng của các hình học quen thuộc, ví dụ: tam giác cân, tam giác đều, hình chữ nhật...

Những câu hỏi kiểm tra khả năng phân tích và giải thích:

- Câu 1: Diện tích của một hình vuông đã cho được biểu diễn bởi biểu thức  $9x^2 + 6xy + y^2$ . Tìm chu vi của hình vuông đó theo  $x, y$ ? (đây là sự giải thích vì những quan hệ bên trong cũng như các yếu tố cần phải được hiểu); - Câu 2: Trong biểu đồ Venn sau đây (hình 1), các số biểu thị số phần tử trong từng miền. Số phần tử của  $Q \cap (P \cup R)$  là: A. 16; B. 20; C. 21; D. 44; E. 7.



Hình 1

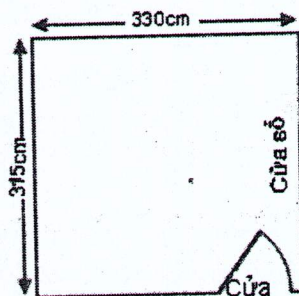
**5) Đánh giá NL phát hiện và giải quyết vấn đề, mô hình hóa.** NL giải quyết vấn đề là một trong những NL quan trọng của con người. HS tiểu học cần được rèn luyện NL này thông qua các hoạt động thành phần như NL thu thập thông tin (lấy dữ liệu), NL suy luận

tìm cách giải quyết (bao gồm xử lý dữ liệu, tìm cách giải quyết tối ưu, đánh giá cách làm của mình), NL thực hiện các tính toán, NL vận dụng vào thực tiễn. Nên sử dụng những tình huống đã được mô hình hóa để làm tình huống có vấn đề cho HS (chương trình đánh giá PISA).

Ví dụ:

Câu 1: Mai và Trung làm việc tại cửa hàng bách hóa của trường. Cửa hàng mở cửa cả ngày để cung cấp dụng cụ học tập cần thiết cho HS. Thật không may, Mai và Trung không thể có mặt ở cửa hàng suốt ngày để thu tiền, do đó họ quyết định dùng một hệ thống tự giác trả tiền. Bút chì và cục gôm là những thứ hàng bán trong hệ thống này. HS sẽ để tiền vào một cái hộp được khóa để trả tiền cho những thứ mình đã mua. Một cục gôm có giá 2.500 đồng và một cây bút chì có giá 1.500 đồng. Có ngày Mai và Trung tìm thấy 11.000 đồng trong hộp đã bị khóa. Vào một ngày khác có 15.000 đồng trong hộp bị khóa. Em hãy đề xuất một cách giúp Mai và Trung có thể tìm được số cục gôm và số bút chì đã bán được dựa trên số tiền thu được.

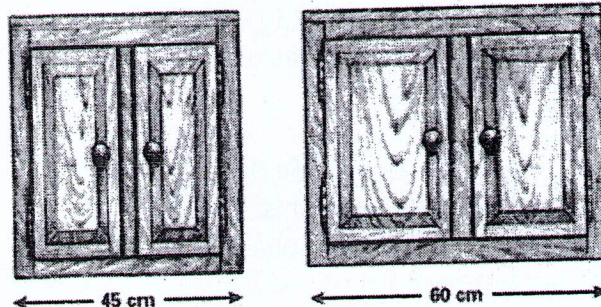
Câu 2: Một đơn vị phục vụ đường băng đột nhiên bị hỏng máy đo dung tích dầu nhưng cần kiểm tra gấp lượng dầu còn lại trong bồn chứa. Trợ lý đường băng kiểm tra bồn chứa thấy mức dầu trong bồn cao 0,56m. Bồn chứa



Hình 2

dầu là một hình trụ đứng đặt nằm ngang, có tiết diện là một elips với trục ngang là 1,06m, trục dọc là 0,8m. Làm thế nào tính được lượng dầu còn lại trong bồn?

Câu 3: Thầy Dũng và cô Thanh sắp thiết kế lại phòng làm việc. Họ muốn đặt những chiếc tủ mới dọc



Hình 3



		Số tử ngắn											
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Số tử dài	0	0	45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	495
	1	60	105	150	195	240	285	330	375	420	465	510	555
	2	120	165	210	255	300	345	390	435	480	525	570	
	3	180	225	270	315	360	405	450	495	540			
	4	240	285	330	375	420	465	510	555				
	5	300	345	390	435	480	525	570					
	6	360	405	450	495	540							
	7	420	465	510	555								
	8	480											
	9												
	10												
	11												

Hình 4

theo bức tường của căn phòng. Họ bắt đầu bằng việc đo đạc căn phòng và vẽ nó như hình 2. Biết rằng có 2 loại tủ với chiều rộng khác nhau là 45 cm và 60 cm (hình 3). Khi đến cửa hàng nội thất, các thầy cô thấy một tờ quảng cáo (hình 4). Em hãy đóng vai nhân viên bán hàng giải thích giúp thầy cô về bảng trên và đề xuất một phương án thiết kế số tủ cho bức tường dài hơn, sao cho số tủ kê được là nhiều nhất. Với cách như thế, em hãy đề xuất thiết kế tủ kê theo bức tường dài 400 cm.

**6) Đánh giá NL sử dụng công cụ, phương tiện học toán.** Công cụ phương tiện học toán được hiểu là toàn bộ các phương tiện giúp cho việc tính toán, làm toán trở nên nhanh hơn, gọn hơn, không còn phụ thuộc hoàn toàn vào não bộ con người. Tiêu biểu có thể kể đến: các công cụ toán học thô sơ như bàn tính, thước, các dụng cụ máy móc đo đạc, máy tính bỏ túi các dòng phổ thông và khoa học, máy vi tính với hàng loạt phần mềm đi kèm (vẽ đồ thị, vẽ hình, tính toán từ đơn giản đến phức tạp, tạo và xử lý các văn bản toán học).

NL sử dụng công cụ - phương tiện toán học ngoài việc khai thác các tính năng trực tiếp của các công cụ này (như thước để đo độ dài, máy tính để tính toán) còn bao gồm cả khả năng kết hợp các dụng cụ này một cách thích hợp để thực hiện một mục đích toán học nào đó.

Ví dụ:

Câu 1: Sử dụng máy tính bỏ túi hoàn thành các yêu cầu sau trong 10 phút:

a) Một người mua nhà giá 200 triệu đồng theo phương thức trả góp. Mỗi tháng trả 3 triệu đồng: 1) Sau bao lâu thì anh ta trả hết nợ?; 2) Nếu anh ta phải chịu lãi suất của số tiền chưa trả là 0,04%/tháng

và mỗi tháng kể từ tháng thứ 2 anh ta vẫn trả 3 triệu thì sao bao lâu anh ta trả hết số tiền trên?

b) Tìm a biết:  $a \times (a + 1) = 420$ .

c) Tính và làm tròn đến hàng phần nghìn:

$$\sqrt{45.5643 + 12.003} : 3,43$$

Câu 2: Sử dụng phần mềm Maple tạo một công cụ giải phương trình bậc ba:  $x^3 - 3x + 1 = 0$ , chỉ với các thao tác nhập hệ số.

Câu 3: Thống kê điểm của HS 2 lớp 11A và 11B. Đưa ra các đánh giá về học lực, dự đoán về tình hình học tập của 2 lớp này trong năm học mới (HS tự thu thập số liệu, tự tính toán các chỉ số thống kê, tự đánh giá). Ghi lại kết quả trên phiếu học tập. Bài tập lớn dành cho nhóm học tập.

Khi đánh giá NL mô hình hóa, NL giải quyết vấn đề, chúng ta cần lưu ý đánh giá qua quá trình HS học tập chứ không chỉ đánh giá trên kết quả. Mặt khác, cùng một nội dung, chúng ta có thể đánh giá nhiều NL, chẳng hạn, khi yêu cầu HS dùng phần mềm hình học để giải một bài toán thì chúng ta có thể đánh giá được cả NL tưởng tượng không gian, NL mô hình hóa, NL giải quyết vấn đề (trong đó có NL suy luận, có NL sử dụng kiến thức, kĩ năng cơ bản), NL sử dụng phần mềm công cụ. □

#### Tài liệu tham khảo

1. Australian Curriculum. ANCARA, 2011.
2. CCI standards mathematics. America, 2010.
3. Chương trình tiểu học, Chương trình trung học, Chương trình Dự bị đại học IB 2012 (bản dịch tiếng Việt).
4. Math standards. New Zealand curriculum, 2010.
5. Programmes du college, Programmes de l'enseignement, de mathématiques, Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008.
6. Madison Metropolitan School District. Canada, 2011.
7. Mathematic curriculum. Quebec, Canada, 2010.
8. Mathematics curriculum. Singapore, 2011.

#### SUMMARY

*By focusing on key competence and analyzing the feature and the role of mathematics, we realized some factors need to be attended to form and develop mathematics competencies, such as: mathematics knowledge and skills; thinking skills; the ability of imagine space; reading and showing mathematics contents; using mathematics notation; modeling mathematics; solving problems; using tool of learning mathematics. This paper also proposes tools and examples for assessing mathematics competencies.*