

Mô hình phá hoại cục bộ cải tiến cho vật liệu giòn, sử dụng biến dạng tương đương theo quy tắc song-năng lượng

The improved local damage model for quasi-brittle using equivalent strain following Bi-energy norm

Phạm Văn Mạnh^{a,b*}, Nguyễn Ngọc Minh^b, Bùi Quốc Tính^b
Pham Van Manh^{a,b*}, Nguyen Ngoc Minh^b, Bui Quoc Tinh^b

^aTrường Đại học Kiến trúc Thành phố Hồ Chí Minh, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

^aUniversity of Architecture Ho Chi Minh City, Ho Chi Minh City, 700000, Vietnam

^bViện nghiên cứu Tính toán Kỹ thuật Duy Tân (DTRICE), Đại học Duy Tân, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

^bDuy Tan Research Institute for Computational Engineering (DTRICE), Duy Tan University, Ho Chi Minh City, 700000, Vietnam.

(Ngày nhận bài: 29/11/2022, ngày phản biện xong: 21/12/2022, ngày chấp nhận đăng: 15/02/2023)

Tóm tắt

Bài báo này trình bày mô hình phá hoại cục bộ cải tiến cho vật liệu giòn (*quasi-brittle*) như bê tông, đá vôi,... được dùng nhiều trong lĩnh vực xây dựng. Trạng thái vật liệu được mô tả thông qua đại lượng đặc trưng cho sự hư hại (*damage*), nhận giá trị từ 0 (trạng thái nguyên vẹn) đến 1 (trạng thái hư hại hoàn toàn). Sự phát triển của đại lượng hư hại theo biến dạng tương đương được biểu diễn theo quy luật hàm mũ. Tham số của hàm phát triển hư hại được liên hệ với năng lượng phá hủy và kích thước phần tử, qua đó khắc phục được nhược điểm khó hội tụ và kết quả phụ thuộc mật độ lưới chia của mô hình phá hoại cục bộ cổ điển. Biến dạng tương đương được tính theo mô hình Bi-energy norm, vốn được phát triển cho mô hình phá hoại phi cục bộ. Đại lượng này xét đến cả ảnh hưởng của điều kiện kéo và điều kiện nén, dựa trên phân tích các giá trị biến dạng chính của tensor biến dạng, do đó biểu diễn tốt hơn ứng xử của vật liệu giòn. Mặt khác, mô hình phá hoại cục bộ có lợi về mặt tính toán hơn mô hình phá hoại phi cục bộ, vì không làm xuất hiện thêm bậc tự do tại mỗi nút. Tính chính xác và hiệu quả của mô hình được khảo sát và so sánh với các kết quả thí nghiệm và kết quả số khác đã công bố trong tài liệu tham khảo.

Từ khóa: Mô hình phá hoại cục bộ cải tiến; biến dạng tương đương; Bi-energy norm; vật liệu giòn.

Abstract

This paper presents an improved local damage model for quasi-brittle materials such as concrete, limestone, etc., which are widely used in construction field. The state of the material is described through a quantity that characterizes the damage, which takes a value from 0 (intact state) to 1 (complete damage state). The evolution of the damage quantity according to the equivalent strain is represented by an exponential law. The parameter of the damage growth function is related to the fracture energy and the element size, thereby overcoming the disadvantage of difficulty in convergence and the result depends on the mesh density of the classical local damage model. The equivalent strain is calculated according to the Bi-energy norm model, which was developed for the non-local damage model. This quantity takes into account the influence of tensile and compression conditions, based on the analysis of the principal strain values of the strain tensor, thus better representing the behavior of brittle materials. On the other hand, the local damage model is

*Tác giả liên hệ: Pham Van Manh, Duy Tan Research Institute for Computational Engineering (DTRICE), Duy Tan University, Ho Chi Minh city 700000, Vietnam; and University of Architecture Ho Chi Minh City, Ho Chi Minh City 700000, Vietnam

Email: manh.phamvan@uah.edu.vn

computationally more advantageous than the non-local damage model, because it does not appear additional degrees of freedom at each node. The accuracy and efficiency of the model were investigated and compared with other experimental and numerical results published in the reference material.

Keywords: The improved local damage model; equivalent strain; Bi-energy norm; quasi-brittle.

1. Giới thiệu

Vật liệu giòn (*quasi-brittle materials*) như bê-tông (*concrete*), đá (*rock*) có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, đặc biệt là trong lĩnh vực ngành xây dựng. Trải qua một thời gian sử dụng lâu dài dưới tác động của môi trường và điều kiện tải trọng bên ngoài khác nhau thì nhiều vật liệu và kết cấu dễ bị hư hại và phá hủy. Việc dự đoán sự phá hủy của vật liệu giòn này luôn là hướng nghiên cứu chính và quan trọng trong cộng đồng khoa học học thuật và công nghiệp. Sự nghiên cứu về phá hủy giúp rất nhiều cho những nhà thiết kế và phát triển vật liệu mới hay kết cấu mới, với mục đích làm giảm rủi ro, tai nạn và nâng cao hiệu quả sử dụng của vật liệu và kết cấu. Trong phạm vi nghiên cứu tính toán cơ học phá hủy cho vật liệu, việc phát triển những mô hình phá hủy mới có nhiều tính chất và đặc điểm nổi trội hơn, hướng đến sự hữu hiệu và tăng độ chính xác của lời giải luôn cần thiết và đặc biệt quan trọng.

Ứng xử của bê tông được xác định bởi tính không đồng nhất do sự xuất hiện của các lỗ rỗng, vết nứt, cốt liệu, vữa,... Những vết nứt và lỗ rỗng nhỏ này có thể là nguyên nhân gây hư hại nghiêm trọng và giảm cường độ của bê tông dưới trạng thái gia tải. Điều quan trọng là phải dự đoán được quá trình phá hoại của bê tông khi chịu tác động của tải trọng lớn. Các tính chất cơ học của bê tông tùy thuộc vào nhiều giai đoạn chịu tải của nó. Ở cấp vĩ mô, bê tông được xem như là đồng nhất; trong khi ở cấp tầm trung, thành phần bê tông xuất hiện hai, ba và bốn giai đoạn được cấu thành từ cốt liệu, vữa, bề mặt và lỗ rỗng. Tìm hiểu về quá trình phá hoại và ứng xử cơ học của bê tông vẫn là một công việc phức tạp. Trong vài thập kỷ qua, các thành tựu về tính mới, hiệu quả và độ chính xác của mô hình tính

toán phá hoại cho bê tông được thực hiện bằng các mô hình vi cơ học, phương pháp hạt ngẫu nhiên, phương pháp không lưới, trường pha, phương pháp tiếp cận đa tỷ lệ, phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng.

Tổng quan về các mô hình phá hủy liên tục có thể chia làm hai nhóm chính với giả thiết là vật liệu bất đẳng hướng và vật liệu đẳng hướng. Nhóm thứ nhất là mô hình phá hủy bất đẳng hướng được đề xuất bởi Krajcinovic và Fonseka [16] dùng véc tơ phá hủy; Mazars and Pijaudier-Cabot [17] với việc ten-xơ bậc hai; Carol và cộng sự [18] và Govindjee và cộng sự [19] đề xuất sự phá hủy với ten-xơ bậc bốn; một số tác giả gần đây như Vilppo và cộng sự [14], Vương và cộng sự [15] dùng mô hình phá hủy phi cục bộ với sự dị hướng của vật liệu. Nhóm mô hình trên nhìn chung tính toán rất phức tạp với ten-xơ biến dạng bậc cao. Nhóm thứ hai là mô hình phá hủy đẳng hướng được các nhà nghiên cứu phát triển mạnh với ưu điểm là việc tính toán đơn giản hơn với sự đẳng hướng của vật liệu. Hiện nhóm này có hai hướng tiếp cận chính là mô hình phá hủy phi cục bộ (non-local damage) và mô hình phá hủy cục bộ (local damage).

(a) Hướng thứ nhất, hướng mô hình phá hủy phi cục bộ thường làm mất đi tính đúng đắn của bài toán giá trị biên, cuối cùng tạo ra vô số nghiệm có năng lượng tiêu tán trong phần tử hữu hạn nhỏ nhất của miền, làm cho giải pháp trở nên vô nghĩa. Để giải thích mô hình điều này cần có các mô hình liên tục bậc cao, mô hình gradient-enhanced hoặc mô hình phi cục bộ dựa trên tích phân. Mô hình phá hủy phi cục bộ được trình bày bởi Poh and Swaddiwudhipong [7]. Cùng với mô hình phi cục bộ, mô hình gradient-enhanced cũng được

so sánh (Poh and Swaddiwudhipong [7]). Mô hình phi cục bộ được triển khai trong ABAQUS bằng các chương trình con UEL do người dùng xác định. Azinpour và cộng sự [8] đã triển khai mô hình phá hủy theo trường pha và độ dốc bằng cách cung cấp một khuôn khổ đơn giản hóa với các chương trình con UMAT và HETVAL của ABAQUS được kết hợp với nhau. Nguyen và cộng sự [2] đã phát triển mô hình gradient được trơn hóa cho vật liệu đẳng hướng và áp dụng cho vật liệu giòn, trong đó giới thiệu biến dạng tương đương theo Bi-energy norm. Dựa trên phân tích biến dạng chính, giá trị biến dạng tương đương theo Bi-energy norm cho phép đánh giá được ảnh hưởng của phần tải kéo và phần tải nén trong biến dạng tương đương, qua đó biểu diễn ứng xử vật liệu giòn tốt hơn so với mô hình von-Mises hiệu chỉnh. Tuy nhiên, hạn chế của các phương pháp phi cục bộ là chi phí tính toán gia tăng rõ rệt, dẫn đến ít khả thi khi ứng dụng trong các bài toán thực tế. Mặt khác, bề rộng vùng phá hủy có xu hướng lớn bất thường.

(b) Hướng thứ hai, mô hình phá hủy cục bộ thì các khía cạnh số của mô hình phá hủy đàn-dẻo đa vết nứt tăng cường (*the augmented multi-crack elastic-plastic-damage model*) với dị hướng do vết nứt gây ra cho vật liệu giòn được trình bày bởi Wu và Xu [5]. Các quy luật tiến hóa cho các biến bên trong được suy ra dựa trên phương pháp tiếp cận Lagrangian tăng cường. Thuật toán số cho bề mặt tải trọng thay đổi được phát triển theo cách tránh được các vấn đề liên quan đến sơ đồ lặp lại cập nhật trong các thuật toán cổ điển. Mô hình được áp dụng để ghi lại vết nứt do kéo trong bê tông, trong đó ứng xử nứt được đặc trưng bởi bề mặt nứt hình elip, chức năng làm mềm hyperbol và định hướng của bề mặt vết nứt tiềm ẩn được xác định theo định đề Mohr. Voyiadjis và Zhou [6] đã thực hiện mô hình phá hủy đàn-dẻo kết hợp trong ABAQUS để phân tích phá hủy của đá khi tiếp xúc ma sát. Mô hình phá hủy đàn

hồi có khả năng xem xét quy mô chiều dài vật liệu trong vật liệu giòn bằng cách kết hợp năng lượng đứt gãy. Hạn chế quan trọng của các mô hình cục bộ khi áp dụng vào phân tích số là kết quả phụ thuộc vào độ mịn của lưới phần tử và khả năng hội tụ (của lời giải phi tuyến) kém. Kurumatani và cộng sự [1] đã cải tiến mô hình phá hủy cục bộ, thông qua giới thiệu sự liên hệ giữa tham số trong hàm biểu diễn sự tăng trưởng hư hại với năng lượng phá hủy vật liệu và kích thước phần tử. Điều này, bên cạnh việc nâng cao ý nghĩa vật lý của hàm tăng trưởng hư hại, còn giúp hạn chế sự phụ thuộc của kết quả vào mật độ lưới chia. Để đơn giản hóa tính toán, các tác giả này đã sử dụng biến dạng tương đương theo mô hình von-Mises hiệu chỉnh. Tuy nhiên cách tính này không chỉ ra được ảnh hưởng của tải kéo và tải nén trong biến dạng tương đương.

Dựa trên các đánh giá về ưu nhược điểm của các mô hình phá hủy cục bộ và phi cục bộ, nhóm tác giả đề xuất cải tiến thêm mô hình của Kurumatani và cộng sự [1], thông qua áp dụng biến dạng tương đương theo Bi-energy norm [2].

2. Lý thuyết tính toán cho mô hình phá hoại cục bộ cải tiến

2.1. Phương trình vi phân cho bài toán tĩnh

Phương trình vi phân dạng mạnh:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (1)$$

Từ phương trình (1), ta có thể biến đổi và viết dưới dạng phương trình dạng yếu Galerkin sau:

$$\int_{\Omega} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma} d\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} d\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (2)$$

trong đó, $\boldsymbol{\varepsilon}$ là tensor biến dạng; $\boldsymbol{\sigma}$ là tensor ứng suất; \mathbf{u} là vector chuyển vị nút; $\bar{\mathbf{t}}$ là vector lực bề mặt; \mathbf{b} là vector lực khối.

2.2. Quan hệ ứng suất - biến dạng - chuyển vị

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được thể hiện dưới định luật Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) \quad (4)$$

với \mathbf{C} là ma trận mô đun đàn hồi của vật liệu; d là đại lượng vô hướng (gọi tắt là biến damage) nhận giá trị thỏa mãn $0 \leq d \leq 1$, thể hiện sự suy yếu của vật liệu do ảnh hưởng của hư hại. Khi $d = 0$ nghĩa là điểm vật liệu ở trạng thái hoàn toàn bình thường (không có hư hại) và khi $d = 1$ tương ứng với điểm vật liệu bị hư hại hoàn toàn.

2.3. Hàm tăng trưởng damage d

Hàm tăng trưởng damage d :

$$d = d(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{khí } \kappa \leq \kappa_0 \\ 1 - \frac{\kappa}{\kappa_0} \left[1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\kappa - \kappa_0)} \right] & \text{khí } \kappa > \kappa_0 \end{cases} \quad (5)$$

trong đó, α và β là các tham số kiểm soát hình dáng của đường cong $d(\kappa)$. Để đơn giản, ta có thể giả thiết $\alpha = 1$ và xác định β từ thí nghiệm kéo đơn trục; $\kappa_0 = f_t / E$ là biến dạng lớn nhất trước khi xuất hiện damage (f_t là cường độ chịu kéo vật liệu) và κ được xác định phụ thuộc vào lịch sử biến dạng tương đương $\tilde{\varepsilon}$, được diễn tả như sau:

$$\kappa \geq 0; \quad \kappa = \max(\tilde{\varepsilon}) \quad (6)$$

Tuy nhiên, việc áp dụng mô hình phá hủy cục bộ vào phân tích số (chẳng hạn phân tích phần tử hữu hạn) đã được biết đến là có nhiều hạn chế như: kết quả phụ thuộc vào mật độ lưới phần tử, khả năng hội tụ (của lời giải phi tuyến) kém.

Để khắc phục sự phụ thuộc của kết quả vào mật độ lưới chia, Kurumatani [1] đã giới thiệu việc tính toán tham số β thông qua liên hệ với các đại lượng đặc trưng cho tính chất vật liệu và đặc trưng kích thước phần tử, cụ thể như sau:

$$\beta = \frac{E\kappa_0 h_e}{G_f} \quad (7)$$

Trong phương trình (7), các thuộc tính vật liệu bao gồm: G_f là năng lượng phá hủy; E là mô đun đàn hồi Young của vật liệu và κ_0 đã được đề cập ở trên; h_e là chiều dài đặc trưng của phần tử, được xác định tùy vào loại phần tử chọn dùng để phân tích bài toán. Chẳng hạn, $h_e = \sqrt{2A_e}$ cho phần tử tam giác và $h_e = \sqrt{A_e}$ cho phần tử tứ giác.

2.4. Biến dạng tương đương $\tilde{\varepsilon}$

Giá trị biến dạng tương đương $\tilde{\varepsilon}$ cho phép liên hệ tensor biến dạng với một đại lượng một chiều, nói cách khác là sự “tương đương” giữa trạng thái chịu tải ba trục với trạng thái chịu tải đơn trục. Trên thực tế có nhiều mô hình biến dạng tương đương đã được giới thiệu bởi các tác giả khác nhau. Độc giả có thể tìm hiểu một vài mô hình biến dạng tương đương phổ biến qua tài liệu [2]. Ở đây, biến dạng tương đương theo mô hình Bi-energy norm [2] được sử dụng

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k\tilde{\varepsilon}_t + \tilde{\varepsilon}_c}{\lambda(k+1)} \quad (8)$$

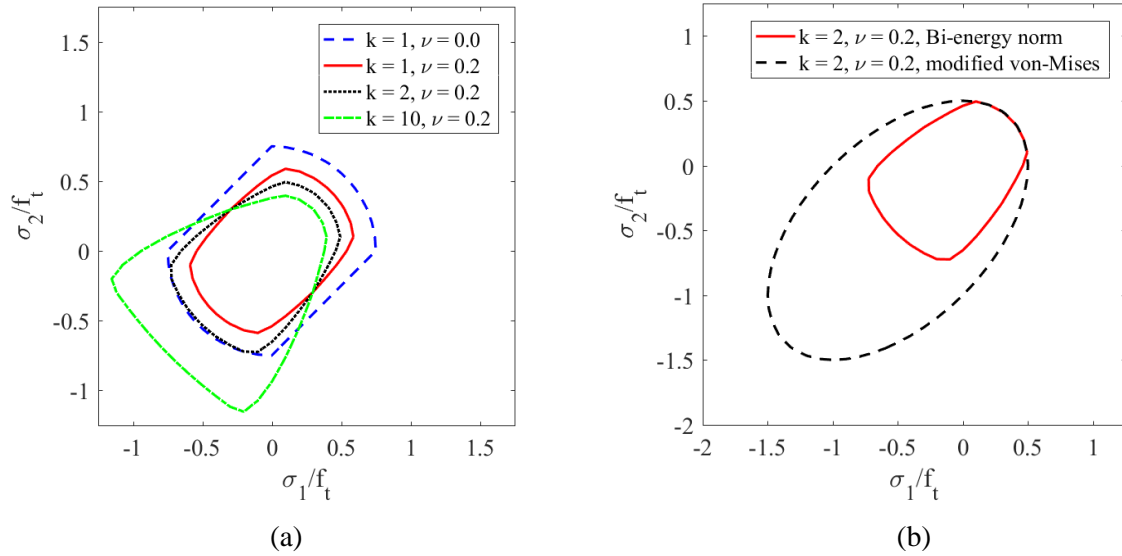
trong đó, k là tỷ số giữa cường độ chịu nén và cường độ chịu kéo của vật liệu; λ là tham số mô hình thường chọn từ 0.7÷1.0; $\tilde{\varepsilon}_t$ và $\tilde{\varepsilon}_c$ lần lượt là biến dạng tương đương vùng kéo và vùng nén, được định nghĩa như sau:

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^+}; \quad \tilde{\varepsilon}_c = \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^-} \quad (9)$$

ở đó, E là mô đun đàn hồi Young; \mathbf{C} là ma trận các hệ số đàn hồi; $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ và $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ là ten-xơ biến dạng cho phần kéo và phần nén từ ten-xơ biến dạng chính $\boldsymbol{\varepsilon}_{prim}$, được xác định như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_2^+ & 0 \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_3^+ \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^- = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_1^- & 0 & 0 \\ 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_2^- & 0 \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_3^- \end{bmatrix} \quad (10)$$

với $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i^+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}; \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i^- = \frac{\varepsilon_i - |\varepsilon_i|}{2}$



Hình 1. Biểu diễn biến dạng tương đương theo bi-Energy norm [2] trong không gian ứng suất chính, khi thay đổi tỷ số k và hệ số nở ngang Poisson ν

Hình 1 thể hiện: a) trực quan biến dạng tương đương theo Bi-energy norm (phương trình (8)) khi thay đổi tỷ số k và hệ số Poisson ν và b) so sánh giữa biến dạng tương đương theo mô hình von Mises hiệu chỉnh trong tài liệu [1]. Có thể thấy biến dạng tương đương theo modified von-Mises hiệu chỉnh có dạng hình ellipse liên tục, tuy nhiên mô hình này thích hợp sử dụng khi chịu tải nén hơn khi chịu tải kéo [12]. Trong khi đó, mô hình Bi-energy norm tỏ ra phù hợp hơn với cả hai dạng chịu tải [2]. Tuy nhiên trong tài liệu [2], mô hình phá hủy phi cục bộ được đề xuất. Mặc dù phần tử bậc thấp được dùng, nhưng chi phí tính toán vẫn tương đối cao do quá trình tính toán phi cục bộ.

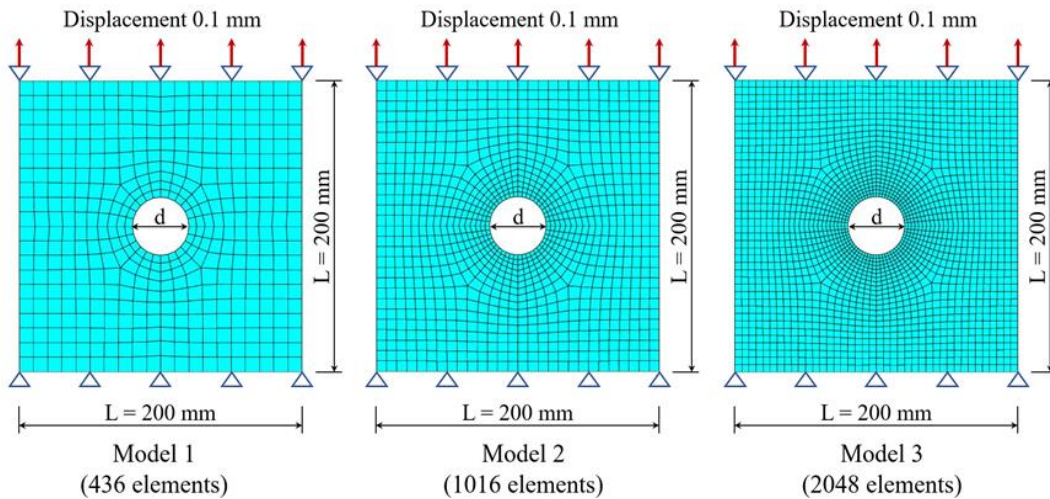
Trong bài báo này, biến dạng tương đương $\bar{\varepsilon}$ theo Bi-energy norm (công thức (8)) [2] được tích hợp vào mô hình phá hủy cục bộ cải tiến [1], nhằm tận dụng lợi thế của Bi-energy norm trong mô tả ứng xử phá hủy vật liệu giòn và lợi thế về chi phí tính toán thấp của mô hình phá hủy cục bộ. Trước tiên, sự không phụ thuộc của kết quả vào mật độ lưới chia được khảo sát và minh họa trực quan qua một ví dụ số. Sau đó,

mô hình đề xuất được áp dụng vào khảo sát hai bài toán chịu tải mode hỗn hợp. Kết quả phân tích được so sánh với lời giải đã công bố trong các tài liệu tham khảo. Về bản chất, ứng xử trong bài toán là ứng xử phi tuyến. Do đó, phương pháp giải lặp Newton-Raphson được sử dụng.

3. Kết quả số

3.1. Bài toán tấm có lỗ khoét ở giữa

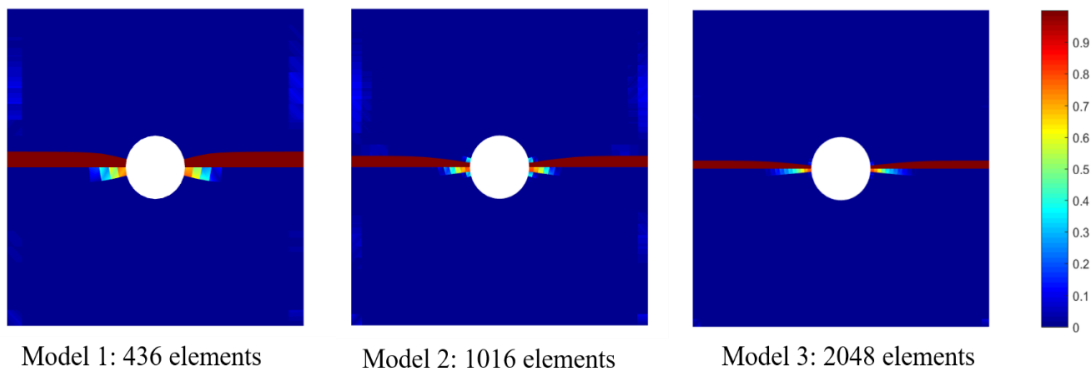
Xét tấm với lỗ khoét ở tâm với điều kiện biên và kích thước hình học như Hình 2, chiều dài tấm $L = 200$ mm, đường kính $d = 40$ mm, chiều dày tấm $t = 1$ mm, mô đun đàn hồi Young's $E = 20000$ MPa, hệ số nở ngang Poisson $\nu = 0.1$, tỷ số cường độ vật liệu chịu nén và chịu kéo $k = 10$, cường độ chịu kéo vật liệu $f_t = 2$ MPa, năng lượng phá hủy $G_f = 0.04$ N/mm, tham số λ được chọn là 0.8. Tấm được giả định ngàm ở biên dưới và biên trên chịu lực kéo hướng lên. Ở ví dụ này, chúng tôi khảo sát 3 trường hợp chia lưới khác nhau và xét ảnh hưởng của mật độ lưới đến kết quả.



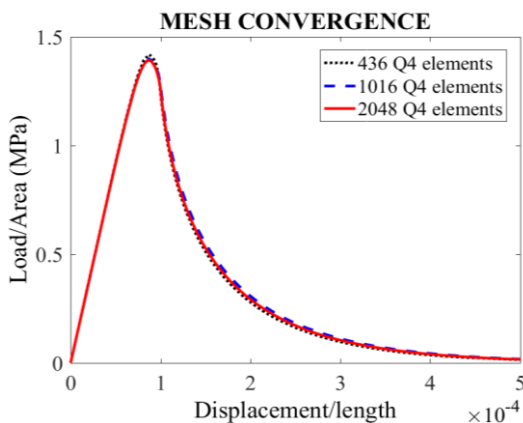
Hình 2. Sơ đồ, điều kiện biên và các model chia lưới phần tử tứ giác
a) Model 1: 436 phần tử, b) Model 2: 1016 phần tử và c) Model 3: 2048 phần tử

Kết quả phân tích tham số d trong 3 trường hợp được thể hiện ở Hình 3. Dựa vào kết quả phân tích tham số d (Hình 3) thì giá trị tham số d sẽ thay đổi từ 0 đến 1 và chúng tôi nhận thấy hướng phát triển vết nứt trong 3 model là giống nhau; tuy nhiên, bề rộng của vết nứt là tùy thuộc vào kích thước phần tử. Hình 4 thể hiện quan hệ giữa ứng suất ($Load/Area$) và biến dạng ($Displacement/length$) trong 3 model chia lưới phần tử khác nhau từ thô đến mịn. Rõ ràng, kết quả phân tích trong 3 model khác nhau nhưng cho dạng đường ứng suất - biến dạng gần như đồng nhất. Điều này, với mô hình phá hủy cục bộ cải tiến mà nhóm tác giả sử dụng thì kết quả cho thấy ít sự phụ thuộc vào mật độ lưới chia phần tử.

đạng ($Displacement/length$) trong 3 model chia lưới phần tử khác nhau từ thô đến mịn. Rõ ràng, kết quả phân tích trong 3 model khác nhau nhưng cho dạng đường ứng suất - biến dạng gần như đồng nhất. Điều này, với mô hình phá hủy cục bộ cải tiến mà nhóm tác giả sử dụng thì kết quả cho thấy ít sự phụ thuộc vào mật độ lưới chia phần tử.



Hình 3. Kết quả tham số phá hủy d trong các model



Hình 4. Đường cong ứng suất - biến dạng

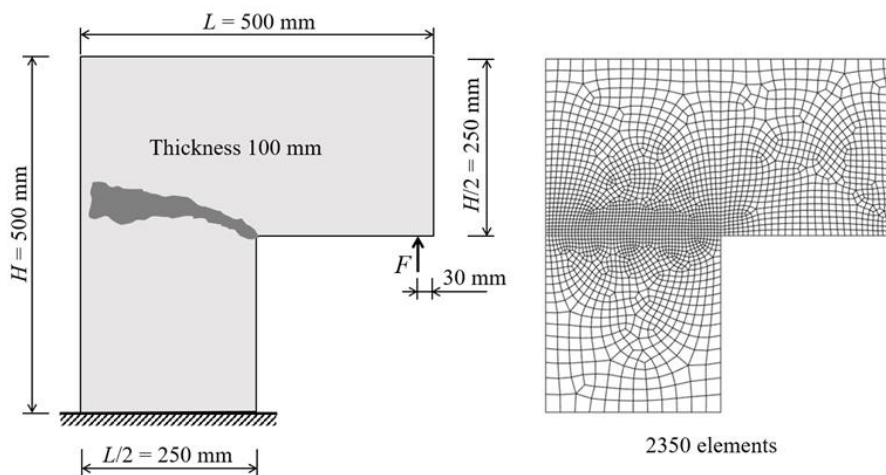
3.2. Bài toán tấm chữ L

Xét tấm chữ L có kích thước hình học, điều kiện biên và cách chia lưới phần tử như Hình 5. Mục đích nhằm giảm số chi phí thời gian tính toán, chúng tôi chủ động chia lưới tương đối mịn vùng xảy ra vết nứt. Ở bài toán này, tấm được ngàm ở phần dưới bên trái và một lực đúng F đều trên cách mép cạnh bên phải một đoạn 30 mm. Mục tiêu chính của ví dụ này là ghi nhận lại quan hệ ứng xử giữa lực - chuyển

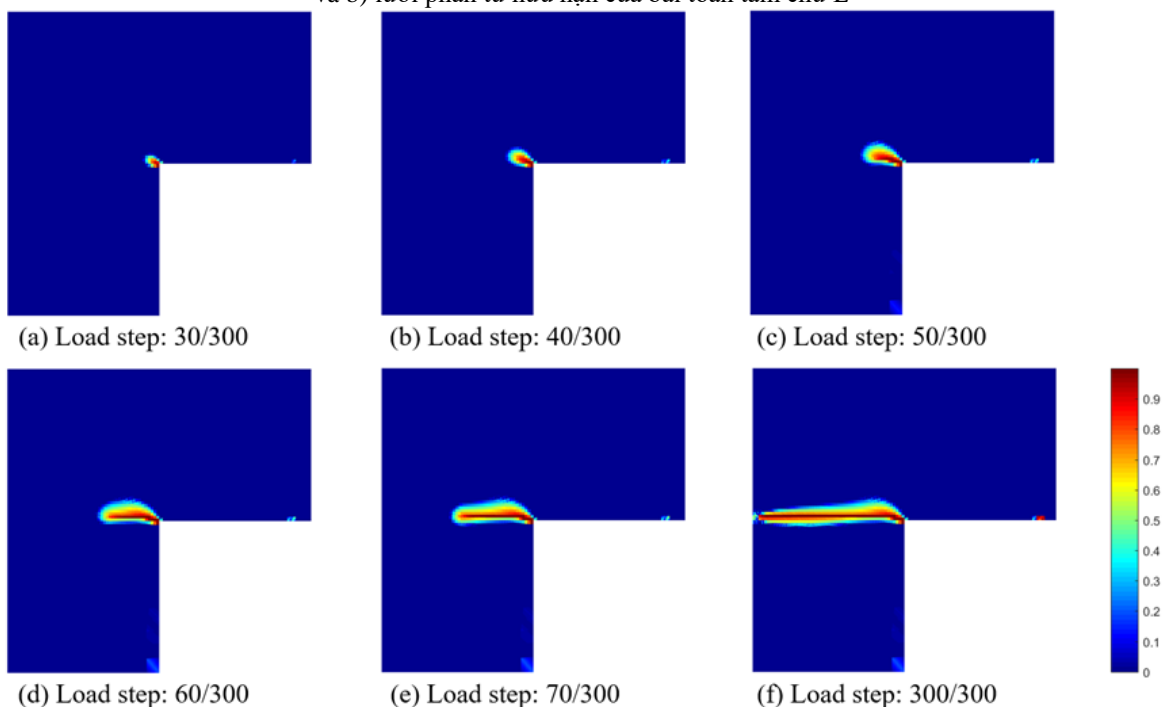
vị và hướng phát triển vết nứt, so sánh kết quả này với kết quả thí nghiệm của Winkler [9]. Các thông số vật liệu được lấy từ kết quả thí nghiệm [9] với: Mô đun đàn hồi Young's $E = 25850 \text{ Mpa}$, hệ số Poisson $\nu = 0.18$, năng lượng phá hủy $G_f = 95 \text{ N/m}$, cường độ chịu kéo $f_t = 2.7 \text{ Mpa}$, tỷ số cường độ chịu nén và chịu kéo $k = 10$, chiều dày tấm $t = 100 \text{ mm}$, tham số mô hình $\lambda = 0.8$.

Kết quả phân tích sự phát triển của vùng phá hủy (thể hiện bởi giá trị đại lượng hư hại d) qua các bước tải khác nhau được thể hiện ở Hình 6.

Vùng phá hủy phát triển từ vị trí tập trung ứng suất (góc chữ L), có xu hướng đi lên theo phương nghiêng trong giai đoạn đầu và sau đó đi ngang về phía bên trái. So với vùng phá hủy trong thực nghiệm ở Hình 5 a, chúng tôi nhận thấy rằng ở giai đoạn đầu thì hướng phát triển vết nứt khá giống với thực nghiệm và phần sau của vết nứt có khuynh hướng thấp hơn so với thực nghiệm nhưng không nhiều. Kết quả cũng cho thấy mô hình có khả năng dự đoán vị trí hình thành và hướng phát triển vết nứt.



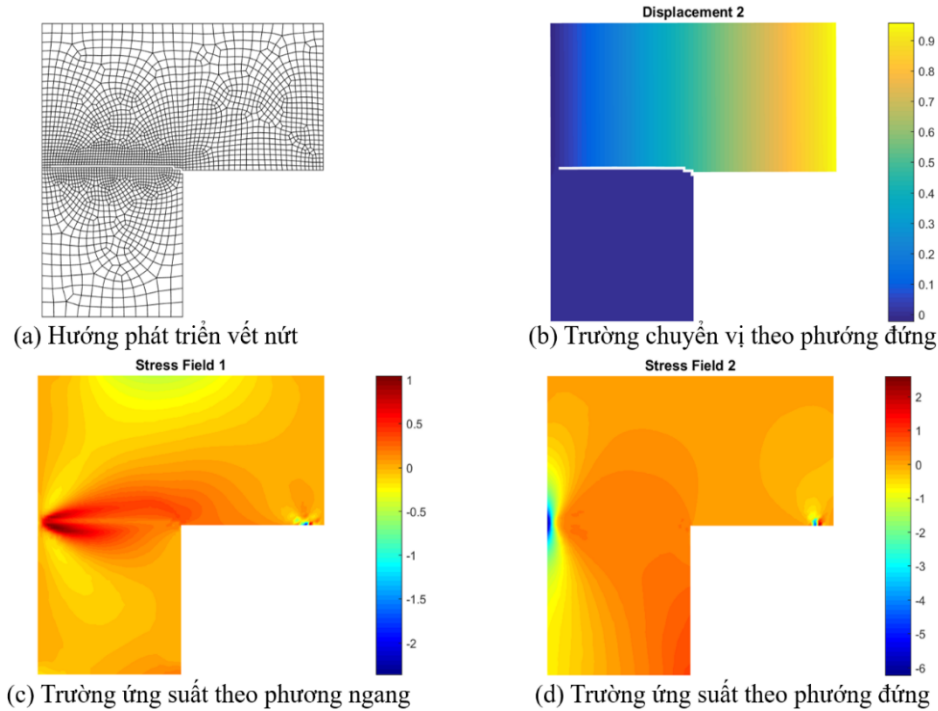
Hình 5. a) Sơ đồ hình học, điều kiện biên vùng sậm màu là vùng phá hủy theo thí nghiệm [9] và b) lưới phần tử hữu hạn của bài toán tấm chữ L



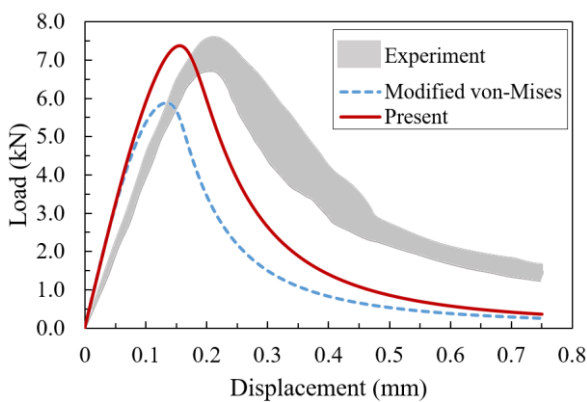
Hình 6. Kết quả phân tích tham số phá hủy d trong các bước tải

Hình 7 thể hiện các kết quả phân tích liên quan đến mô hình. Hình 7a thể hiện hướng phát triển vết nứt sau khi ẩn các phần tử bị phá hủy tương ứng có tham số $d \geq 0.95$. Hình 7b thể hiện trường chuyển vị theo phương đứng từ

$0 \div 1.0$ mm khi gia tăng bước tải đến khi phá hủy hoàn toàn. Hình 7c thể hiện trường ứng suất theo phương ngang và Hình 7d thể hiện trường ứng suất theo phương đứng.



Hình 7. Kết quả phân tích hướng phát triển vết nứt, trường chuyển vị đứng, trường ứng suất



Hình 8. Kết quả quan hệ ứng xử giữa tải - chuyển vị so với kết quả thí nghiệm [20]

Biểu đồ quan hệ ứng xử giữa tải - chuyển vị được thể hiện ở Hình 8 cho thấy sự phù hợp nhất định với kết quả thực nghiệm, về hình dáng đồ thị và về giá trị tải tối đa. Trên thực tế, đây là một bài toán phát triển vết nứt theo mode hỗn hợp. Phá hủy gây ra do cả thành phần cắt

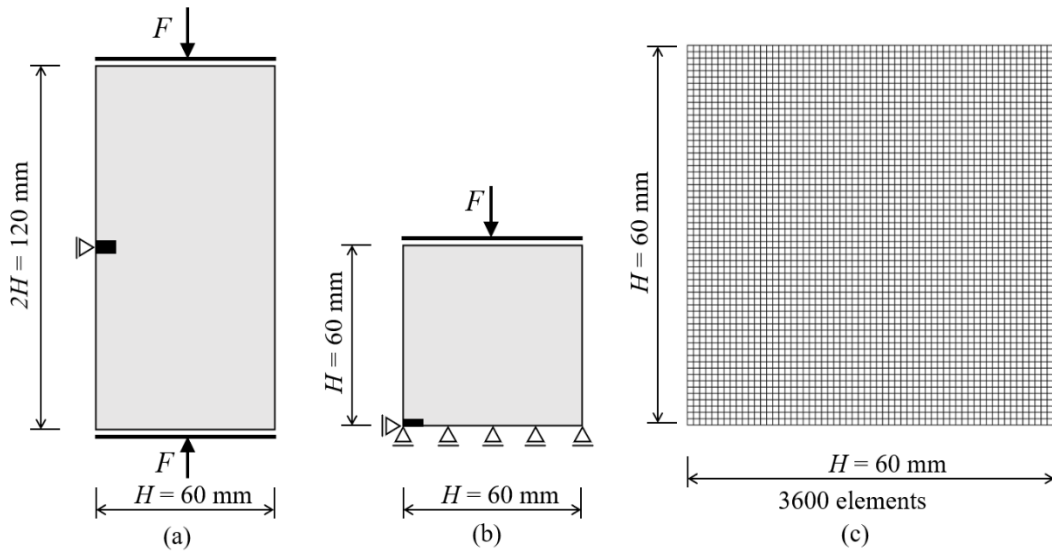
(mode II) và thành phần kéo (mode I). Trong mô hình hiện tại, cả mô hình biến dạng tương đương lẫn hàm biểu diễn tăng trường biến dạng không thể hiện ảnh hưởng của tải cắt. Đó có thể là lý do cho sự khác biệt của đường cong tải - chuyển vị và dự đoán hướng vết nứt phát triển so với thực nghiệm. Đặc biệt, mô hình hiện tại cho kết quả đường cong tải - chuyển vị gần với thực nghiệm hơn so với việc sử dụng biến dạng tương đương theo modified von-Mises.

3.3. Bài toán tâm với hiện tượng shear band

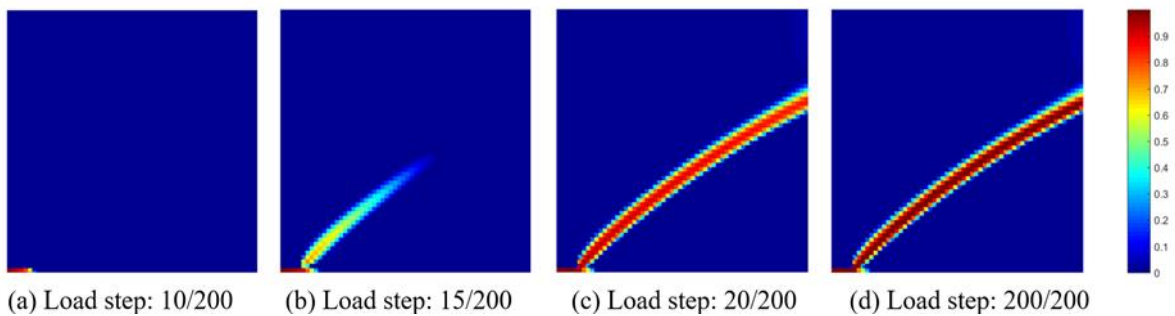
Shear band là hiện tượng thường gặp khi chịu nén. Nhiều mô hình phá hủy trước đây, bao gồm cả một số trường hợp mô hình phi cục bộ, cho kết quả không chính xác [10]. Do đó, khảo sát bài toán này có ý nghĩa trong việc minh họa khả năng của phương pháp đề xuất khi giải các bài toán có hiện tượng phức tạp.

Xét tấm Shear band chịu lực nén ở hai đầu với kích thước hình học, điều kiện biên như Hình 9a. Nhằm đơn giản sơ đồ tính, chúng tôi chỉ xét một nửa sơ đồ như Hình 9b và xét với 3600 phần tử tứ giác như Hình 10c. Với sơ đồ tính này, tấm Shear band được giả định ràng buộc chuyển vị đứng ở biên dưới và cố định một đầu ở góc dưới bên phải (vị trí vật liệu được làm giảm độ cứng) và biên trên sẽ chịu một lực nén theo phương đứng hướng xuống. Các thông số

vật liệu được lấy từ kết quả từ Simone [10] với: Mô đun đàn hồi Young's $E = 20000 \text{ Mpa}$, hệ số Poisson $\nu = 0.2$, năng lượng phá hủy $G_f = 13\text{N/m}$, cường độ chịu kéo $f_t = 2.0 \text{ Mpa}$, tỷ số cường độ chịu nén và chịu kéo $k = 1$, chiều dày tấm $t = 1 \text{ mm}$, tham số mô hình $\lambda = 0.75$. Mục đích của ví dụ này là sử dụng biến dạng tương đương theo bi-Energy norm và so sánh với lời giải số của các tác giả trước đó Simone [10], Giry [11] và Nguyen [2].



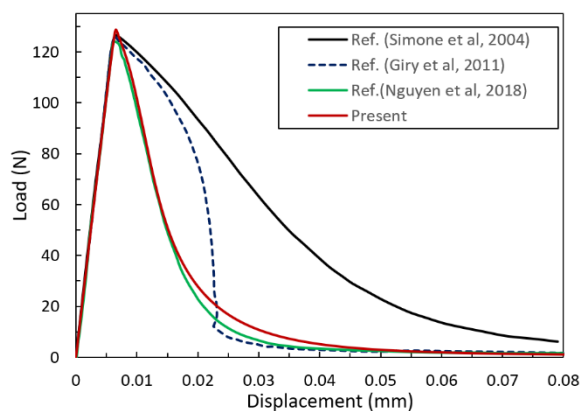
Hình 9. Tấm Shear band với (a) Sơ đồ đầy đủ về hình học và điều kiện biên của tấm; (b) Sơ đồ một nửa về hình học và điều kiện biên của tấm; (c) Sơ đồ chia lưới phần tử tứ giác



Hình 10. Kết quả phân tích tham số phá hủy d qua các bước tải

Kết quả phân tích trường tham số phá hủy d qua các bước tải như Hình 10. Qua đó, ta thấy được hướng phát triển vết nứt là khá tương đồng so với kết quả đã công bố bài báo [2, 10, 11]. Quan hệ giữa tải - chuyển vị có đỉnh tải trọng khá gần với kết quả của nhóm tác giả Giry [11] và nhóm tác giả Simone [10] như

Hình 11. Phần ứng xử biến mềm theo Bi-energy norm cũng hợp lý so với dạng đường cong thường thấy. Trong khi đó, mô hình phi cục bộ theo ứng suất tương đương của nhóm tác giả Giry [11] dự đoán ứng xử dạng snap-back.



Hình 11. Kết quả quan hệ ứng xử giữa tải và chuyển vị so với các tác giả khác

4. Thảo luận

Mô hình này cũng còn một số hạn chế nhất định. Ảnh hưởng của sự phát triển vết nứt do tải cắt (mode II) chưa được thể hiện tường minh, và do đó, khả năng dự đoán hướng phát triển vết nứt trong trường hợp mode hỗn hợp chưa tốt. Để xét đến ứng xử của các vật liệu như đá, ảnh hưởng của mode II cần được phân tích [13]. Điều này sẽ tiếp tục được khảo sát trong các nghiên cứu tiếp theo. Bên cạnh đó, mô hình cũng chưa xét đến tính dị hướng của vật liệu.

5. Kết luận

Mô hình phá hủy cục bộ cải tiến theo [1] đã được kết hợp thành công với biến dạng tương đương theo Bi-energy norm [2]. Điều này mang lại một số ưu điểm như: tận dụng lợi thế của mô hình phá hủy cục bộ cải tiến về sự ít phụ thuộc của kết quả tính toán vào mật độ lưới chia và chi phí tính toán thấp, và tận dụng khả năng Bi-energy norm trong mô tả ứng xử vật liệu giòn với chi phí tính toán thấp có ý nghĩa quan trọng cho khả năng mở rộng ứng dụng mô hình vào các bài toán 3 chiều phức tạp hơn trong tương lai. Kết quả tính toán của mô hình cho thấy có thể dự đoán hướng phát triển vết nứt và đáp ứng tải - chuyển vị khá hợp lý khi so sánh với thực nghiệm cũng như lời giải số của các tác giả khác.

Tài liệu tham khảo

- [1] M. Kurumatani, K. Terada, J. Kato, T. Kyoya, K. Kashiya. (2016). An isotropic damage model based on fracture mechanics for concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 155, 49-66. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.01.020.
- [2] T. H. A. Nguyen, T. Q. Bui, S. Hirose. (2018). Smoothing gradient damage model with evolving anisotropic nonlocal interactions tailored to low-order finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 328, 498-541. DOI: 10.1016/j.cma.2017.09.019.
- [3] J.H.P. de Vree, W.A.M. Brekelmans, M.A. van Gils. (1995). Comparison of non-local approaches in continuum damage mechanics. *Comput & Structures*, 55, 581-588. DOI: doi.org/10.1016/0045-7949(94)00501-S.
- [4] Mazars J. and Hamon F. and Grange S. (2015). A new 3D damage model for concrete under monotonic cyclic and dynamic loadings. *Materials and Structures*, 48, 3779-3793. DOI:10.1617/s11527-014-0439-8.
- [5] Wu J-Y and Xu S-L. (2011). An augmented multicrack elastoplastic damage model for tensile cracking. *International Journal of Solids and Structures*, 48(18), 2511-2528. DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.05.001.
- [6] Voyiadjis GZ and Zhou Y. (2019). Numerical modeling of frictional contact between a blunt tool and quasibrittle rock. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 52(10), 3771-3790. DOI: 10.1007/s00603-019-01800-0.
- [7] Hien Poh L and Swaddiwudhipong S. (2009). Over-nonlocal gradient enhanced plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 46(25-26), 4369-4378. DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.08.025.
- [8] Azinpour E, Ferreira JPS, Parente MPL, et al. (2018). A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(1), 15. DOI: doi.org/10.1186/s40323-018-0106-7.
- [9] B.J. Winkler. (2001). *Traglastuntersuchungen Von Unbewehrten Und Bewehrten Betonstrukturen Auf Der Grundlage Eines Objektiven Werkstoffgesetzes Fur Beton*, Ph.D. thesis Innsbruck university.
- [10] Simone, H. Askes, L.J. Sluys. (2004). Incorrect initiation dan propagation of failure in non-local and gradient-enhanced media, *Internat. J. SolidsStructures*, 41, 351-363. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.09.020.
- [11] Giry, F. Dufour, J. Mazars. (2011). Stress-based non-local damage model. *Internat. J. Solids Structures*, 48, 3431-3434. DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.08.012.

- [12] M. Jirásek, M. Bauer. (2012). Numerical aspects of the crack band approach. *Comput. & Structures*, 110–111, 60–78. DOI: doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.06.006.
- [13] X. Zhang, S. W. Sloan, C. Vignes, D. Sheng. (2017). A modification of the phase-field model for mixed mode crack propagation in rock-like materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 322, 123–136. DOI: doi.org/10.1016/j.cma.2017.04.028.
- [14] Vilppo, J., Kouhia, R., Hartikainen, J., Kolari, K., Fedoroff, A., & Caloni, K. (2021). Anisotropic damage model for concrete and other quasi-brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 225, 111048. DOI: doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111048.
- [15] Chanh Dinh Vuong, Tinh Quoc Bui, Sohichi Hirose. (2022). A direction-dependent smoothing gradient damage model for anisotropic brittle fracture. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 119, 103353. DOI: 10.1016/j.tafmec.2022.103353.
- [16] D. Krajcinovic and G. U. Fonseka. (1981). The Continuous Damage Theory of Brittle Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 48(4), 816. DOI: doi.org/10.1115/1.3157739.
- [17] Mazars, J., & Pijaudier-Cabot. (1989). Continuum Damage Theory-Application to Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(2), 345–365. DOI: doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:2(345).
- [18] Carol, E. Rizzi and K. William. (1994). A unified description of elastic degradation and damage based on a loading surface. *Int. J. Solids Struct.*, 31, 2835–2865. DOI: doi.org/10.1016/0020-7683(94)90072-8.
- [19] S. Govindjee, G. J. Kay and J. C. Simo. (1995). Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 38, 3611–3633. DOI: doi.org/10.1002/nme.1620382105