TÍNH NỬA LIÊN TỤC CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM XẤP XỈ BÀI TOÁN BAO HÀM TỰA BIẾN PHÂN

Lâm Quốc Anh[1], *Phạm Văn Huy*[1],
Trần Trịnh Minh Sơn [2] *và Cao Thanh Tình*[3]

ABSTRACT

In this paper we introduce notions of approximate solutions and approximate solution sets to multivalued quasivariational inclusion problems in metric vector spaces. Sufficient conditions for the lower semicontinuity and upper semicontinuity of these approximate solution sets are established. Our results improve recent existing ones in the literature.

Keywords: Quasivariational inclusion problems; lower semicontinuity; upper semicontinuity; continuity; approximate

Title: Semicontinuity of the approximate solution sets of quasivariational inclusion problems

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm nghiệm xấp xỉ của bài toán bao hàm tựa biến phân đa trị trong không gian vectơ mêtric. Nghiên cứu về các điều kiện đủ để các ánh xạ nghiệm xấp xỉ của bài toán bao hàm tựa biến phân đa trị là nửa liên tục trên hoặc nửa liên tục dưới. Các kết quả của chúng tôi là mở rộng và phát triển các kết quả đã có ngay cả khi áp dụng vào các trường hợp đặc biệt.

Từ khóa: Bài toán bao hàm tựa biến phân; nửa liên tục dưới; nửa liên tục trên; liên tục; nghiệm xấp xỉ

1 GIỚI THIỆU

Gần đây sự ổn định nghiệm của nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu được nghiên cứu rất rộng rãi. Tính nửa liên tục trên được nghiên cứu trong Khanh và Luu (2007) cho bài toán bất đẳng thức biến phân, trong Anh và Khanh (2008c), Bianchi và Pini (2006), Huang, Li và Thompson (2006) cho bài toán cân bằng, và Anh và Khanh (2008a) cho bao hàm biến phân. Tính nửa liên tục dưới được công bố trong Khanh và Luu (2007) cho bài toán bất đẳng thức biến phân, trong Anh và Khanh (2008c), Huang, Li và Thompson (2006) cho bài toán cân bằng và trong Anh và Khanh (2008b) cho bài toán bao hàm biến phân. Bên cạnh đó, tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng cũng đã được nghiên cứu trong các bài Anh và Khanh (2007) Bianchi và Pini (2006).

Mặt khác, trong nhiều bài toán thực tế, nghiệm chính xác không tồn tại do dữ liệu của các bài toán không đáp ứng đủ các điều kiện tồn tại nghiệm. Hơn nữa, các dữ liệu của bài toán thường thu được bằng cách đo đạc hoặc thống kê tính toán, nên các giá trị này chỉ mang tính xấp xỉ. Do mô hình của các bài toán thực tế thường là xấp xỉ nên việc tìm nghiệm chính xác cho các bài toán này có thể không thật sự cần thiết. Do đó sự tồn tại và ổn định của nghiệm xấp xỉ của các bài toán trong lý

[1] Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
[2] Trường Trung học Phổ thông Chuyên Đà Lạt
[3] Trường Đại học Đồng Tháp

thuyết tối ưu được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, xem Anh và Khanh (2008c), Hai và Khanh (2007), Khanh và Luu (2007). Theo chúng tôi được biết, cho đến nay vẫn chưa có bài báo nào nghiên cứu về tính ổn định cho ánh xạ nghiệm xấp xỉ của bài toán bao hàm biến phân. Chúng ta cũng lưu ý rằng thuật ngữ "bao hàm biến phân" được hiểu theo nhiều nghĩa khác nhau. Trong Zhang (2007) nó là dạng tổng quát đa trị của bất đẳng thức biến phân. Bao hàm biến phân trong Chidume, Zegeye và Kazmi (2004) là bài toán tìm điểm 0 của các ánh xạ đơn điệu cực đại. Ở đây, chúng tôi nghiên cứu bài toán bao hàm biến phân theo nghĩa như ở các bài báo Hai và Khanh (2007), Hai, Khanh và Quan (2009).

Đối với mọi lớp bài toán, vấn đề tồn tại nghiệm bao giờ cũng chiếm một vị trí trung tâm. Bên cạnh đó, ổn định nghiệm cũng có vai trò quan trọng hàng đầu. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự ổn định nghiệm xấp xỉ cho bài toán bao hàm biến phân theo nghĩa nửa liên tục của ánh xạ nghiệm. Tất nhiên, trong áp dụng thực tế, sự ổn định theo nghĩa càng mạnh thì càng tốt, nhưng trong nhiều trường hợp thực tế các dữ liệu của các bài toán không đáp ứng đủ các giả thiết cho ánh xạ nghiệm ổn định theo các nghĩa mạnh này. May mắn là trong nhiều bài toán thực tế, chẳng hạn như trong sự cân bằng Walras–Ward và Arrow–Deubreu–Mckenzie của bài toán cạnh tranh kinh tế, thì sự nửa liên tục của ánh xạ nghiệm là đủ trong nhu cầu áp dụng của nó. Do đã có nhiều kết quả cho sự tồn tại nghiệm (xem trong Hai và Khanh 2007; Hai, Khanh và Quan 2009), nên trong bài báo này ta luôn giả sử nghiệm xấp xỉ tồn tại trong lân cận của điểm đang xét.

Phần còn lại của bài báo được trình bày như sau: trong Mục 2 chúng tôi thiết lập điều kiện đủ cho các tập ε-nghiệm của các bài toán (τ-VIPi), i = 1,2, là nửa liên tục dưới, Mục 3 xét tính nửa liên tục trên và tính liên tục cho cho ánh xạ ε-nghiệm của các bài toán đang xét.

Cho X, Z và Λ là các không gian tôpô Hausdorff và Y là không gian vectơ tôpô, cho $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$ là các tập con khác trống và $C \subseteq Y$ là tập đóng có phần trong int$C$ không rỗng. Cho các hàm đa trị sau:

$$K_i : A \times \Lambda \to 2^A; i = 1, 2,$$
$$T : A \times A \times \Lambda \to 2^B,$$
$$F : B \times A \times A \times \Lambda \to 2^Y .$$

Với các tập M, N ta dùng các ký hiệu sau:

$(u,v)\mathrm{w}\, M \times N$ nghĩa là $\forall u \in M, \exists v \in N$,

$(u,v)\mathrm{s}\, M \times N$ nghĩa là $\forall u \in M, \forall v \in N$,

với $\tau \in \{\mathrm{w}, \mathrm{s}\}$, ta xét các bài toán bao hàm tựa biến phân sau, với mỗi $\lambda \in \Lambda$,

(τ-VIP1) tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho $(x, y)\tau K_2(\bar{x}, \lambda) \times T(x, \bar{x}, \lambda)$,

$$F(y, x, \bar{x}, \lambda) \subseteq F(y, \bar{x}, \bar{x}, \lambda) + C ;$$

(τ-VIP2) tìm $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho $(x, y)\tau K_2(\bar{x}, \lambda) \times T(x, \bar{x}, \lambda)$,

$$F(y, \bar{x}, \bar{x}, \lambda) \subseteq F(y, x, \bar{x}, \lambda) - C .$$

Với mỗi $\lambda \in \Lambda,$ ta ký hiệu tập nghiệm của bài toán (τ-VIP*i*), *i* = 1, 2 là $S_i^\tau(\lambda)$. Đặc biệt khi *T* là ánh xạ đơn trị thì $S_i^w(\lambda) = S_i^s(\lambda),$ i = 1, 2. Trường hợp *T* là ánh xạ đa trị tổng quát, ta có $S_i^w(\lambda) \subseteq S_i^s(\lambda),$ i= 1,2. Nếu *F* là ánh xạ đơn trị, rõ ràng $S_1^\tau(\lambda) = S_2^\tau(\lambda)$. Trong trường hợp đa trị tổng quát không có mối quan hệ bao hàm giữa các nghiệm trên.

Trước hết ta nhắc lại một số định nghĩa sau: Cho *X* và *Y* như ở trên và $G : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị từ *X* vào *Y*. *G* được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) tại x_0 nếu, với mỗi tập mở $U \subseteq Y$ với $G(x_0) \cap U \neq \emptyset$, thì tồn tại lân cận *N* của x_0 sao cho, với mọi $x \in N$, $G(x) \cap U \neq \emptyset$. Một phát biểu tương đương khác: *G* là lsc tại x_0 nếu, với mọi lưới $\{x_\alpha\}$, với $x_\alpha \to x_0$, khi đó với mọi $y \in G(x_0)$, tồn tại $y_\alpha \in G(x_\alpha)$ sao cho $y_\alpha \to y$. *G* được gọi là nửa liên tục trên (usc) tại x_0 nếu với mỗi tập mở $U \supseteq G(x_0)$, có một lận cận *N* của x_0 sao cho $U \supseteq G(N)$. *G* được gọi là nửa liên tục trên Hausdorff (*H*−usc) tại x_0 nếu với mỗi lân cận *B* của gốc trong *Y*, có lân cận *N* của x_0 sao cho $G(N) \subseteq G(x_0) + B$. *G* được gọi là đóng tại x_0 nếu với $(x_\alpha, y_\alpha) \in \text{graph}G := \{(x,y) : y \in G(x)\}$, $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x_0, y_0)$ thì $y_0 \in G(x_0)$. Ta nói *G* có một tính chất nào đó trong tập $A \subset X$ nếu *G* thỏa tính chất đó tại mỗi điểm trong *A*.

Bổ đề 1.1 Nếu $G(x_0)$ là compact, thì G là usc tại x_0 khi và chỉ khi với mọi lưới $x_\alpha \to x_0$, và $y_\alpha \in G(x_\alpha)$, tồn tại lưới con $\{y_\beta\}$ của lưới $\{y_\alpha\}$, $y_\beta \to y_0$ và $y_0 \in G(x_0)$.

Giả sử Y là không gian vec tơ mê tric, với mỗi số thực $\varepsilon \geq 0$, ta định nghĩa tập $B_Y^\varepsilon := \{y \in Y \mid d(y,0) \leq \varepsilon\}$, tập ε-nghiệm của bài toán (τ-VIP1) là $\bar{x} \in K_1(\bar{x}, \lambda)$ sao cho $(x,y)\tau K_2(\bar{x},\lambda) \times T(\bar{x},x,\lambda),\ F(y,x,\bar{x},\lambda) \subseteq F(y,\bar{x},\bar{x},\lambda) + B_Y^\varepsilon + C$. Tập tất cả các ε-nghiệm của bài toán (τ-VIP1) tại λ được ký hiệu $S_1^{\tau,\varepsilon}(\lambda)$. Tập ε-nghiệm $S_2^{\tau,\varepsilon}(\lambda)$ được định nghĩa tương tự. Với i = 1, 2, ta định nghĩa:

$$\tilde{S}_i^{\tau,\varepsilon}(\lambda) = \begin{cases} S_i^\tau(\lambda_0)\ , & \text{nếu } \lambda = \lambda_0, \\ S_i^{\tau,\varepsilon}(\lambda)\ , & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

2 TÍNH NỬA LIÊN TỤC DƯỚI CỦA TẬP ε-NGHIỆM

Với mọi λ trong lân cận của λ_0 đặt

$$E(\lambda) := \{x \in A : x \in K_1(x,\lambda)\}.$$

Định lý 2.1 *Xét bài toán* (τ-VIPi), *i* = 1, 2. *Giả sử*

(a) *E là lsc tại* λ_0; K_2 *là usc, có giá trị compact trong* $A \times \{\lambda_0\}$;

(b) *T là lsc trong* $A \times A \times \{\lambda_0\}$, *nếu* τ = w; *và*

T là usc và có giá trị compact trong $A \times A \times \{\lambda_0\}$, *nếu* τ = s;

(c) $[\forall (y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0), F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) + C]$

$\Rightarrow [\exists \bar{\alpha}, F(y_{\bar{\alpha}}, \hat{x}_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \mu_{\bar{\alpha}}) \subseteq F(y_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \mu_{\bar{\alpha}}) + B_Y^\varepsilon + C]$, *nếu i* = 1, *và*

$$[\forall (y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0), F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) - C]$$
$$\Rightarrow [\exists \bar{\alpha}, F(y_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \mu_{\bar{\alpha}}) \subseteq F(y_{\bar{\alpha}}, \hat{x}_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \mu_{\bar{\alpha}}) + B_Y^\varepsilon - C], \text{ nếu } i = 2.$$

Khi đó $S_i^{\tau.\varepsilon}$ là lsc tại λ_0 với mỗi $\varepsilon > 0$.

Chứng minh. Do kỹ thuật chứng minh cho bốn trường hợp trên là tương tự với nhau nên chúng ta chỉ chứng minh chi tiết cho trường hợp $i = 1$ và $\tau = s$. Lấy $\varepsilon > 0$ cố định. Giả sử $S_1^{s.\varepsilon}$ không lsc tại λ_0, nghĩa là, tồn tại $x_0 \in S_1^{s.\varepsilon}(\lambda_0)$ và lưới $\lambda_\alpha \to \lambda_0$ sao cho với mọi $x_\alpha \in S_1^{s.\varepsilon}(\lambda_\alpha), x_\alpha$ không hội tụ về x_0. Vì $x_0 \in S_1^{s.\varepsilon}(\lambda_0) = S_1^{s.\varepsilon}(\lambda_0)$ nên với mọi $\hat{x}_0 \in K_2(x_0, \lambda_0)$ và $y_0 \in T(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$ ta có

$$F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) + C. \tag{1}$$

Do tính nửa liên tục dưới của E tại λ_0, tồn tại $\bar{x}_\alpha \in E(\lambda_\alpha), \bar{x}_\alpha \to x_0$. Theo giả thiết phản chứng, phải có lưới con $\bar{x}_\beta$ sao cho với mọi $\beta, \bar{x}_\beta \notin S_1^{s.\varepsilon}(\lambda_\beta)$, nghĩa là tồn tại $\hat{x}_\beta \in K_2(\bar{x}_\beta, \lambda_\beta)$ và $y_\beta \in T(\hat{x}_\beta, \bar{x}_\beta, \lambda_\beta)$ sao cho

$$F(y_\beta, \hat{x}_\beta, \bar{x}_\beta, \lambda_\beta) \not\subseteq F(y_\beta, \bar{x}_\beta, \bar{x}_\beta, \lambda_\beta) + B_Y^\varepsilon + C. \tag{2}$$

Vì K_2 là usc và có giá trị compact tại (x_0, λ_0). Có thể giả sử rằng $\hat{x}_\beta \to \hat{x}_0$ với $\hat{x}_0 \in K_2(x_0, \lambda_0)$ (chọn lưới con nếu cần thiết). Do T là usc và có giá trị compact tại $(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$, nên ta có thể xem $y_\beta \to y_0 \in T(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$. Theo giả thiết (c) và bao hàm thức (1) ta suy ra tồn tại $\bar{\beta}$ sao cho

$$F(y_{\bar{\beta}}, \hat{x}_{\bar{\beta}}, \bar{x}_{\bar{\beta}}, \lambda_{\bar{\beta}}) \subseteq F(y_{\bar{\beta}}, \bar{x}_{\bar{\beta}}, \bar{x}_{\bar{\beta}}, \lambda_{\bar{\beta}}) + B_Y^\varepsilon + C,$$

điều này mâu thuẫn với (2). □

Thí dụ sau đây chỉ ra rằng Định lý 2.1 chỉ đúng cho ánh xạ nghiệm $S_i^{\tau.\varepsilon}$ mà không đúng cho ánh xạ nghiệm $S_i^{\tau.\varepsilon}$.

Thí dụ 2.1 Cho $X = Y = Z = R$, $\Lambda = [0,1]$, $C = R_+$, $A = B = R_+$, $K_1(x,\lambda) = K_2(x, \lambda) = [\lambda, \lambda+1]$, $T(\hat{x}, x, \lambda) = \{\lambda\}$, $F(y, \hat{x}, x, \lambda) = \{y(\hat{x} - x)\}$ và $\lambda_0 = 0$. Vì T, F là các ánh xạ đơn trị nên bốn bài toán trong Mục 1 là trùng nhau. Tính toán trực tiếp ta có $S_i^\tau(0) = [0,1]$, $S_i^\tau(\lambda) = \{\lambda + 1\}$ và $S_i^{\tau.\varepsilon}(\lambda) = \left[1 + \lambda - \frac{\varepsilon}{\lambda}, 1 + \lambda\right]$ với mọi $\lambda \in (0,1]$. Do đó $S_1^{s.\varepsilon}$ là lsc tại 0 nhưng S_1^s không lsc tại 0.

Nhận xét 2.1 Nếu F là liên tục và có giá trị compact trong $A \times B \times B \times \{\lambda_0\}$ thì giả thiết (c) của Định lý 2.1 nghiệm đúng.

Thật vậy, giả sử $(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$ và $F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) + C$, ta chứng minh tồn tại $\bar{\alpha}$ sao cho

$$F(y_{\bar{\alpha}}, \hat{x}_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \lambda_{\bar{\alpha}}) \subseteq F(y_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \lambda_{\bar{\alpha}}) + B_Y^\varepsilon + C.$$

Giả sử ngược lại, với mọi α,

$$F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \not\subseteq F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) + B_Y^\varepsilon + C.$$

Khi đó tồn tại $\hat{f}_\alpha \in F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha)$, sao cho với mọi $f_\alpha \in F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha)$,

$$\hat{f}_\alpha - f_\alpha \notin B_Y^\varepsilon + C.$$

Do *F* nửa liên tục trên và có giá trị compact nên ta có thể giả sử $\hat{f}_\alpha \to \hat{f}_0 \in F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$. Khi đó tồn tại $f_0 \in F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0)$ sao cho

$$\hat{f}_0 - f_0 \in C.$$

Do *F* nửa liên tục dưới nên tồn tại $f_\alpha \in F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha)$, $f_\alpha \to f_0$. Do đó

$$\hat{f}_\alpha - f_\alpha \to \hat{f}_0 - f_0,$$

đây là điều mâu thuẫn vì $\hat{f}_\alpha - f_\alpha \notin B_Y^\varepsilon + C$.

Lập luận tương tự như trên ta cũng chứng tỏ được rằng nếu $(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$ và $F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) - C$, thì tồn tại $\bar{\alpha}$ sao cho

$$F(y_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \lambda_{\bar{\alpha}}) \subseteq F(y_{\bar{\alpha}}, \hat{x}_{\bar{\alpha}}, x_{\bar{\alpha}}, \lambda_{\bar{\alpha}}) + B_Y^\varepsilon - C.$$

Nhận xét 2.2 Trong trường hợp đặc biệt khi $Y \equiv R$, $Z \equiv X^*$, Λ, $C = R_+$ và $F(y, x, \bar{x}, \lambda) = \langle g(\bar{x}, \lambda), x \rangle$ với X^* là không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục từ *X* vào *R* và $g : X \times \Lambda \to X^*$ là một ánh xạ đơn trị thì các bài toán (τ-VIP*i*) trở thành các bài toán giả bất đẳng thức biến phân được xét trong Khanh và Luu (2005, 2007). Khi đó Định lý 2.1 là mở rộng các Định lý 5.1 và 5.3 trong Khanh và Luu (2007).

3 TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA TẬP ε-NGHIỆM

Trong phần này chúng ta xem xét tính nửa liên tục trên của tập ε-nghiệm. Với giả thiết về *Y* và định nghĩa tập B^ε_Y như Mục 2.

Định lý 3.1 *Xét bài toán* (τ-VIP*i*), *i* = 1, 2. *Giả sử*

(a) E là usc có giá trị compact tại λ_0, K_2 là lsc trong $A \times \{\lambda_0\}$;

(b) T là usc và có giá trị compact trong $A \times A \times \{\lambda_0\}$, nếu τ = w; và

T là lsc trong $A \times A \times \{\lambda_0\}$, nếu τ = s;

(c) $[\forall (y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0), \forall \alpha, F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \subseteq F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) + B_Y^\varepsilon + C]$

$\Rightarrow [F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) + B_Y^\varepsilon + C]$, *nếu i* = 1, *và*

$[\forall (y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0), \forall \alpha, F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \subseteq F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) + B_Y^\varepsilon - C]$

$\Rightarrow [F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) + B_Y^\varepsilon - C]$, *nếu i* = 2.

Khi đó $S_i^{\tau.\varepsilon}$ *là usc tại* λ_0 *với mỗi* $\varepsilon \geq 0$.

Chứng minh. Tương tự như ở Định lý 2.1 ta chỉ cần chứng minh chi tiết cho trường hợp τ = w và i = 2, các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự. Lấy ε ≥ 0 cố định. Giả sử tồn tại một lân cận mở U của $S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_0)$, lưới $\lambda_\alpha \to \lambda_0$ và $x_\alpha \in S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_\alpha)$ sao cho $x_\alpha \notin U, \forall \alpha$. Theo tính nửa liên tục trên của E và tính compact của $E(\lambda_0)$, ta có thể giả sử $x_\alpha \to x_0$ với $x_0 \in E(\lambda_0)$. Nếu $x_0 \notin S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_0)$ thì tồn tại $\hat{x}_0 \in K_2(x_0, \lambda_0)$ sao cho với mọi $y_0 \in T(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$,

$$F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) \not\subseteq F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) + B_Y^{\varepsilon} - C. \tag{3}$$

Vì K_2 là lsc tại (x_0, λ_0) nên tồn tại $\hat{x}_\alpha \in K_2(x_\alpha, \lambda_\alpha)$ sao cho $\hat{x}_\alpha \to \hat{x}_0$. Vì $x_\alpha \in S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_\alpha)$ tồn tại $y_\alpha \in T(\hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha)$ để

$$F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \subseteq F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) + B_Y^{\varepsilon} - C. \tag{4}$$

Do tính nửa liên tục trên của T tại $(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$, và tính compact của $T(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$ nên tồn tại lưới con y_β sao cho $y_\beta \to y_0$ với $y_0 \in T(\hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$. Từ việc $(y_\beta, \hat{x}_\beta, x_\beta, \lambda_\beta) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$ và giả thiết (c) dẫn đến sự mâu thuẫn giữa (3) và (4). Do đó $x_0 \in S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_0)$, điều này lại trái với giả thiết $x_\beta \notin U, \forall \beta$.

Ta giả sử $S_2^{w.\varepsilon}$ không đóng tại λ_0, nghĩa là có một lưới $(x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (x_0, \lambda_0)$ với $x_\alpha \in S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_\alpha)$ nhưng $x_0 \notin S_2^{w.\varepsilon}(\lambda_0)$, với lập luận tương tự như phần chứng minh trên cũng cho ta điều mâu thuẫn. □

Thí dụ sau đây chỉ ra rằng Định lý 3.1 chỉ đúng cho ánh xạ nghiệm $S_i^{\tau.\varepsilon}$ mà không đúng cho ánh xạ nghiệm $\tilde{S}_i^{\tau.\varepsilon}$.

Thí dụ 3.1. Cho $X = Y = Z = R$, $\Lambda = [0,1]$, $C = R_+$, $A = B = R$, $K_1(x, \lambda) = [\lambda, \lambda+1]$, $T(\hat{x}, x, \lambda) = \{\lambda\}$, λ_0=0, ε = 0 và

$$K_2(x,\lambda) = \begin{cases} \{0\}, & \text{nếu } \lambda=0, \\ [\lambda, \lambda+1], & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

$$F(y, \hat{x}, x, \lambda) = \begin{cases} (-\infty, x), & \text{nếu } \lambda = 0, \hat{x} \neq x, \\ (-\infty, x], & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn khi τ = w. Định lý 3.1 suy ra $S_1^{w.\varepsilon}(.)$ là nửa liên tục trên tại 0 (thực tế $S_1^{w.\varepsilon} = [\lambda, \lambda+1], \forall \lambda \in [0,1]$). Tính toán trực tiếp ta có $S_1^{w}(0) = \{0\}$, nên $S_1^{w.\varepsilon}$ là không nửa liên tục trên tại 0. Do đó Định lý 3.1 nói chung không còn đúng nếu ta thay $S_i^{\tau.\varepsilon}$ bởi $S_i^{\tau.\varepsilon}$.

Nhận xét 3.1 Nếu F là liên tục và có giá trị compact trong $A \times B \times B \times \{\lambda_0\}$ thì giả thiết (c) của Định lý 3.1 nghiệm đúng.

Thật vậy, giả sử $(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$, $F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \subseteq F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) + B_Y^\varepsilon + C$, ta chứng minh

$$F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) + B_Y^\varepsilon + C.$$

Giả sử ngược lại, nếu $F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) \not\subseteq F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) + B_Y^\varepsilon + C$. Khi đó tồn tại $\hat{f}_0 \in F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$, sao cho với mọi

$$f_0 \in F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0),\ \hat{f}_0 - f_0 \notin B_Y^\varepsilon + C.$$

Do F là nửa liên tục dưới nên tồn tại $\hat{f}_\alpha \in F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha)$, $\hat{f}_\alpha \to \hat{f}_0$. Khi đó tồn tại $f_\alpha \in F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha)$ sao cho

$$\hat{f}_\alpha - f_\alpha \in B_Y^\varepsilon + C.$$

Do F nửa liên tục trên và có giá trị compact nên ta có thể giả sử $f_\alpha \to f_0 \in F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0)$. Do đó

$$\hat{f}_\alpha - f_\alpha \to \hat{f}_0 - f_0,$$

đây là điều mâu thuẫn vì $\hat{f}_0 - f_0 \notin B_Y^\varepsilon + C$.

Lập luận tương tự như trên ta cũng chứng tỏ được rằng nếu $(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \to (y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0)$ và $F(y_\alpha, x_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) \subseteq F(y_\alpha, \hat{x}_\alpha, x_\alpha, \lambda_\alpha) + B_Y^\varepsilon - C$ thì

$$F(y_0, x_0, x_0, \lambda_0) \subseteq F(y_0, \hat{x}_0, x_0, \lambda_0) + B_Y^\varepsilon - C.$$

Thí dụ sau đây cho thấy rằng chiều ngược lại của Nhận xét 3.1 là không đúng.

Thí dụ 3.2. Cho *X, Y, Z, Λ, C, A, B*, K_1, *T*, λ_0, ε như trong Thí dụ 3.1, $K_2(x,\lambda) = \{1\}$ và

$$F(y, \hat{x}, x, \lambda) = \begin{cases} [x, +\infty), & \text{nếu } \lambda = 0, \\ [x + \lambda - 1, x + \lambda + 1), & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó các giả thiết của Định lý 3.1 thỏa mãn khi τ = w, i =1, tính toán trực tiếp ta có $S_1^w(\lambda) = [0,1], \forall \lambda \in \Lambda$ do đó S_1^w là usc tại λ_0=0 vì $S_1^w(\lambda) = [0,1], \forall \lambda \in \Lambda$. Tuy nhiên F không là lsc (không là usc) và không có giá trị compact tại $B \times A \times A \times \{\lambda_0\}$

Nhận xét 3.2 Trong trường hợp đặc biệt như ở Nhận xét 2.2, Định lý 3.1 là mở rộng các Định lý 6.2 và 6.3 trong Khanh và Luu (2007).

4 KẾT LUẬN

Các kết quả nghiên cứu về tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm xấp xỉ của bài toán bao hàm tựa biến phân trong bài báo này có thể được áp dụng vào các trường hợp đặc biệt như bài toán tối ưu, bài toán điểm trùng, bài toán mạng giao thông,… Hơn nữa, các kết quả này còn có thể sử dụng để nghiên cứu vấn đề về sự đặt chỉnh nghiệm của lớp bài toán này, đây là vấn đề rất gần với sự ổn định nghiệm và thuật toán giải của các bài toán trong lý thuyết tối ưu.

CẢM TẠ

Chúng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến người phản biện về những nhận xét và đề nghị quý báu, nhằm giúp cho bài báo này được hoàn chỉnh hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q. and Khanh, P. Q. (2004). Semicontinuity of the solution sets of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl*. 294: 699-711.

Anh, L. Q. and Khanh, P. Q. (2007). Uniqueness and Hölder continuity of the solution to multivalued equilibrium problems in metric spaces, *J. Glob. Optim*. 37: 449-465.

Anh, L. Q. and Khanh, P. Q. (2008a). Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks I: Upper semicontinuities. *Set-Valued Anal.* 16: 267-279.

Anh, L. Q. and Khanh, P. Q. (2008b). Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks II: Lower semicontinuities. *Set-Valued Anal.* 16: 943-960.

Anh, L. Q. and Khanh, P. Q. (2008c). Semicontinuity of the approximate solution sets of multivalued quasiequilibrium problems. *Numerical Funct.Anal. Optim*. 29: 24-42.

Bianchi, M. and Pini, R. (2006). Sensitivity for parametric vector equilibria. *Optimization* 55: 221–230.

Chidume, C.E., Zegeye, H., Kazmi, K.R. (2004). Existence and convergence theorems for a class of multivalued variational inclusions in Banach spaces. *Nonlinear Anal.* 59: 694–656.

Hai, N. X. and Khanh, P.Q. (2007). The existence of ε-solutions to general quasiequilibrium problems. *Vietnam J. Math.* 35: 563-572.

Hai, N. X., Khanh, P.Q. and Quan, N. H. (2009). On the existence of solutions to quasivariational inclusion problems. *J. Glob. Optim.*, to appear.

Huang, N. J., Li, J. and Thompson, H. B. (2006). Stability for parametric implicit vector equilibrium problems. *Math. Comput. Model.* 43:1267–1274.

Khanh, P. Q. and Luu, L. M. (2007). Lower and upper semicontinuity of the solution sets and approximate solution sets to parametric multivalued quasivariational inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* 133: 329–339.

Zhang, Q. B. (2007). Generalized implicit variational-like inclusion problems involving $G-\eta$-monotone mappings. *Appl. Math. Lett.* 20: 216–221.